Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Gabarito da 1^a Prova Unificada de Cálculo II - Engenharia
29/09/2010

1^a **Questão:** (2,5 pontos)

Suponhamos que um compartimento tenha 1200 l de ar, inicialmente isento do monóxido de carbono. No instante $t = 0$, uma corrente de gás, com 4% de monóxido de carbono, é injetada no compartimento à razão de $0,1\ l/min$ e a mistura gasosa homogênea sai do compartimento a esta mesma razão.

1. Achar a expressão da quantidade total $q(t)$ de monóxido de carbono no compartimento, em qualquer instante $t > 0$. (1 ponto) E a expressão da concentração $x(t)$ de monóxido de carbono?
2. A exposição demorada ao monóxido de carbono, em concentração tão baixa quanto $0,00012$, é danosa para o organismo humano. Em que instante $\bar{t}$ esta concentração será atingida no compartimento?

Modelagem: $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{4}{100}\dfrac{1}{10} - \dfrac{q}{1200}\dfrac{1}{10}$, $q(0) = 0$.

A quantidade total:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{4}{1000} - \frac{q}{12000} = \frac{48-q}{12000} \implies \int \frac{dq}{48-q} = \int \frac{dt}{12000} \implies$$

$$-\ln|48 - q(t)| = \frac{t}{12000} + C \implies \ln|48 - q(t)| = -\frac{t}{12000} - C \implies$$

$$|48 - q(t)| = e^{-\frac{t}{12000} - C} = e^{-\frac{t}{12000}}\ e^{-C} = \overline{C}e^{-\frac{t}{12000}}.$$

Como $q(0) = 0$, $48 = \overline{C}$ e $|48 - q(t)| = 48\ e^{-\frac{t}{12000}}$, para $t > 0$.

Como a concentração máxima será de 4%, $q(t)$ máximo será 48, $|48 - q| = 48 - q$ e:

$q(t) = 48 - 48e^{-\frac{t}{12000}}$, para $t > 0$.

A concentração:

$$x(t) = \frac{q(t)}{volume} = \frac{48 - 48e^{-\frac{t}{12000}}}{1200}, \text{ para } t > 0.$$

Quando $x(\bar{t}) = \dfrac{12}{100000}$ **?**

$$\frac{12}{100000} = \frac{48 - 48e^{-\frac{\bar{t}}{12000}}}{1200} \iff \frac{3}{1000} = 1 - e^{-\frac{\bar{t}}{12000}} \iff e^{-\frac{\bar{t}}{12000}} = \frac{997}{1000} \iff$$

$$-\frac{\bar{t}}{12000} = \ln\left(\frac{997}{1000}\right) \iff \bar{t} = -12000\ \ln\left(\frac{997}{1000}\right).\ \text{minutos}$$

2^a **Questão:** (2,5 pontos)

Determine a solução geral da equação

$$y'' - 6y' + 10y = 2\,\mathrm{sen}^2 x\ .$$

Solução:

A solução da equação homogenea é: $y_h(x) = C_1 e^{3x}\cos x + C_2 e^{3x}\,\mathrm{sen}\, x$.
Reescrevendo $2\,\mathrm{sen}^2 x = 1 - \cos(2x)$, buscamos uma solução particular do tipo $y_p(x) = A + B\cos(2x) + C\,\mathrm{sen}\,(2x)$, A, B e C, constantes a determinar.
Calculando as derivadas primeira e segunda de $y_p(x)$ e substituindo na equação, determinamos as constantes, $A = 1/10$, $B = -1/30$ e $C = 1/15$.

Solução geral: $y(x) = C_1 e^{3x}\cos x + C_2 e^{3x}\,\mathrm{sen}\, x + \dfrac{1}{10} - \dfrac{\cos(2x)}{30} + \dfrac{\mathrm{sen}\,(2x)}{15}$.

3^a **Questão:** (2,5 pontos)

Uma partícula P_1 se move ao longo da curva C_1 definida por

$$\sigma_1(t) = (t^2, t^3)\ , t \in \mathbb{R}$$

e uma partícula P_2 se move ao longo da curva C_2 definida por

$$\sigma_2(t) = (\cos(2t), \sqrt{2\cos^2 t - 1})\ , t \in [0, \pi/4].$$

1. Determine as equações cartesianas das curvas acima.
2. Esboce a trajetória das partículas P_1 e P_2, separadamente, mostrando o sentido de percurso em cada uma delas.
3. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva σ_1, no ponto (4,8).
4. Em que pontos as trajetórias dos pontos P_1 e P_2 se cruzam? As partículas vão colidir?

Solução

1. Como $(t^2)^3 = (t^3)^2$, a equação cartesiana de C_1 é $x^3 = y^2$.
   Como $\sqrt{2\cos^2 t - 1} = \sqrt{2\left(\dfrac{\cos(2t)+1}{2}\right) - 1} = \sqrt{\cos(2t)}$, a equação cartesiana de C_2 é $y = \sqrt{x}$.
2. Esboço das curvas
3. Temos $\sigma_1(t) = (4, 8) \iff t = 2$. Como $V(t) = \sigma_1'(t) = (2t, 3t^2)$, o vetor tangente em $t = 2$ é $V(2) = (4, 12)$.
   Equações paramétricas da reta tangente: $x(t) = 4 + 4t$, $y(t) = 8 + 12t$, para $t \in \mathbb{R}$.
4. As trajetórias se cruzam quando $x^3 = y^2 = x$, isto é, nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. As partículas não colidem porque passam por estes pontos em valores distintos de t.

4^a **Questão:** (2,5 pontos)

Uma partícula partindo do ponto $(0,0,1)$ se move com o vetor posição $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e vetor velocidade $V(t) = (-3z(t), 4, 3x(t))$.

1. Determine o vetor posição $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
2. Reconheça a curva e faça um esboço da mesma indicando o sentido do percurso.
3. Determine a distância percorrida desde o instante $t = 0$ ao instante $t = 2\pi$.

Solução

1. $(x'(t), y'(t), z'(t)) = V(t) = (-3z(t), 4, 3x(t)) \implies$
   $x'' = -3z' = -9x \quad , \quad y' = 4 \quad \text{e} \quad z'' = 3x' = -9z.$
   As equações $x'' + 9x = 0$ e $z'' + 9z = 0$ tem solução $x(t) = A\cos(3t) + B\,\text{sen}\,(3t)$ e $z(t) = C\cos(3t) + D\,\text{sen}\,(3t)$, respectivamente.
   A equação $y' = 4$ tem solução $y(t) = 4t + E$.
   Como $r(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (0,0,1)$, então $A = 0$, $E = 0$ e $C = 1$.
   Como $V(0) = (-3z(0), 4, 3x(0)) = (-3, 4, 0)$ e
   $V(t) = (3B\cos(3t), 4, -3\,\text{sen}\,(3t) + 3D\cos(3t))$, então $B = -1$ e $D = 0$.

   Vetor posição: $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (-\,\text{sen}\,(3t), 4t, \cos(3t))$.
2. Repare que $x^2 + z^2 = 1$ e a coordenada $y(t)$ é linear no parâmetro t. Logo a curva é uma hélice partindo do ponto com coordenadas $(0,0,1)$ sobre o eixo z, e enrolando-se ao redor do eixo y, no sentido trigonométrico, na direção do aumento de y.
3. A distância é dada por $\displaystyle\int_0^{2\pi} ||V(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9+16}\,dt = 10\pi.$