,

Questão 1: (2.0 pontos)

A taxa de crescimento de uma população é proporcional à raiz quadrada da população em cada instante t. Quando $t = 1$ ano a população é de 400 indivíduos e quando $t = 2$ anos a população é de 625 indivíduos.

(a) (1.5 ponto) Dê a equação da população num instante t qualquer;

Solução:

Seja $P(t)$ o número de indivíduos no ano t. Assim, a evolução da população com o tempo é modelado pelo seguinte problema de contorno

$$\frac{dP}{dt}(t) = k\sqrt{P(t)} \tag{1}$$

$$P(1) = 400; \quad P(2) = 625. \tag{2}$$

Como a EDO (1) é separável, temos que

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} = \int k\,dt \Longrightarrow \frac{P^{1-1/2}}{1/2} = kt + C \Longrightarrow 2\sqrt{P(t)} = kt + C \Longrightarrow P(t) = \frac{(kt+C)^2}{4}.$$

As constantes k e C são obtidas utilizando-se os valores de contorno (2):

$$P(1) = \frac{(k+C)^2}{4} = 400 \quad \Longrightarrow \quad k + C = 40; \tag{3}$$

$$P(2) = \frac{(2k+C)^2}{4} = 625 \quad \Longrightarrow \quad 2k + C = 50. \tag{4}$$

Resolvendo os sistema (3)(4), temos que $k = 10$ e $C = 30$. Assim,

$$P(t) = \frac{(10t+30)^2}{4} = (5t+15)^2. \tag{5}$$

(b) (0.5 ponto) Em quantos anos a população será de 900 indivíduos?

Solução:

Usando a solução (5), temos que

$$P(t_1) = (5t_1 + 15)^2 = 900 \Longrightarrow 5t_1 + 15 = 30 \Longrightarrow t_1 = 3 \text{ anos}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Resolva o problema de valores iniciais

$$x''(t) + 25x(t) = 20\text{sen}(5t); \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$$

Solução:

- Solução da equação homogênea associada $x''(t) + 25x(t) = 0$:
  Raízes da equação característica $r^2 + 25 = 0$: $r = \pm 5i$.
  A solução da equação homogênea é $x_h(t) = C_1 \cos(5t) + C_2 \operatorname{sen}(5t)$.
- Solução particular:
  $x_p(t) = t(A\cos(5t) + B\operatorname{sen}(5t))$.
  $x_p'(t) = (A + 5Bt)\cos(5t) + (B - 5At)\operatorname{sen}(5t)$;
  $x_p''(t) = (10B - 25At)\cos(5t) - (10A + 25Bt)\operatorname{sen}(5t)$.
  Substituindo x_p e suas derivadas na equação não-homogênea, obtemos:
  $x_p'' + 25x_p = 10B\cos(5t) - 10A\operatorname{sen}(5t) \equiv 20\operatorname{sen}(5t) \Longrightarrow B = 0$ e $A = -2$.
  Logo, $x_p(t) = -2t\cos(5t)$.
- Solução geral da equação não-homogênea:
  $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = (C_1 - 2t)\cos(5t) + C_2\operatorname{sen}(5t)$.
  $x'(t) = (5C_2 - 2)\cos(5t) + (10t - 5C_1)\operatorname{sen}(5t)$.
- Usando os dados iniciais, temos: $x(0) = C_1 = 1$ e $x'(0) = 5C_2 - 2 = 3 \Longrightarrow C_2 = 1$.

Assim, a solução do problema de valores iniciais é $x(t) = (1 - 2t)\cos(5t) + \operatorname{sen}(5t)$.

Questão 3: (3.0 pontos)
Sejam S_1 dada por $(x-1)^2+y^2+z^2 = 1$ e S_2 o gráfico de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $P_0 = (1/4, \sqrt{3}/4, 1/2)$.

(a) (1.0 ponto) Dê a equação do plano tangente a S_1 em P_0,

Solução:
Temos: a normal a S_1 em $P = (x,y,z) \in S_1$ é: $n_1(P) = (2(x-1), 2y, 2z)$. Então, $n_1(P_0) = (-3/2, \sqrt{3}/2, 1)$. Portanto a equação do plano tangente é:

$$-3/2(x - 1/4) + \sqrt{3}/2(y - \sqrt{3}/4) + (z - 1/2) = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + \sqrt{3}y + 2z = 1.$$

(b) (1.0 ponto) Dê a equação da reta normal a S_2 em P_0,

Solução:
Temos: $n_2(P) = ((2x, 2y, -2z) \Longrightarrow n_2(P_0) = (1/2, \sqrt{3}/2, -1)$. Portanto a equação paramétrica da reta normal é:

$$\begin{cases} x &= 1/4 + t/2 \\ y &= \sqrt{3}/4 + \sqrt{3}t/2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= 1/2 - t \end{cases}$$

(c) (1.0 ponto) Dê a equação da reta tangente a $C = S_1 \cap S_2$ em P_0.

Solução:

Temos: $n_1(P_0) = (-3/2, \sqrt{3}/2, 1)$ e $n_2(P_0) = (1/2, \sqrt{3}/2, -1)$
$\Longrightarrow n_1(P_0) \times n_2(P_0) = (-\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3})$. Portanto a equação paramétrica da reta tangente é:

$$\begin{cases} x = 1/4 - \sqrt{3}t \\ y = \sqrt{3}/4 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1/2 - \sqrt{3}t \end{cases}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Sejam $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ e $D = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) (1.0 ponto) Determine e classifique os pontos críticos de f em D;

Solução:
Temos: $\nabla f(x,y) = (2x-1, 4y) = (0,0) \Longleftrightarrow x = 1/2, \quad y = 0$. Portanto $P_0 = (1/2, 0)$ é ponto critico.
Como $A = f_{xx}(P_0) = 2 > 0 \quad B = f_{xy}(P_0) = 0 \quad C = f_{yy}(P_0) = 4$, e
$\triangle(P_0) = B^2 - A \cdot C = -8 < 0$, concluímos que P_0 é minimo local.

(b) (1.0 ponto) Determine, utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrange, os pontos de máximo e mínimo absolutos de f na fronteira de D.

Solução:
Temos que resolver o sistema $\nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y)$ e $x^2 + y^2 = 1$. Ou seja,

$$\begin{cases} 2x - 1 = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

As soluções são:

$$P_1 = (1,0) \quad P_2 = (-1,0) \quad P_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2) \quad P_4 = (-1/2, -\sqrt{3}/2).$$

Como

$$f(P_1) = 0, \quad f(P_2) = 2, \quad f(P_3) = f(P_4) = 9/4,$$

Concluímos que P_1 é ponto de mínimo na fronteira e P_3 e P_4 são pontos de máximo na fronteira.

(c) (0.5 ponto) Determine os valores máximo e mínimo de f em D.

Solução:
Comparando as imagens acima com $f(P_0) = -1/4$, concluímos que P_0 é mínimo global em D e o valor minimo em D é $-1/4$.
O valor máximo global em D é igual a $9/4$.