Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo II - 2010/1

Questão 1. Considere uma população $P = P(t)$ com frações constantes de natalidade e mortalidade $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, respectivamente. Seja $m > 0$ a taxa constante de emigração. Assuma que a taxa com que a população varia com o tempo pode ser modelada pela equação

$$\frac{dP}{dt} = \kappa P - m\,, \quad \text{onde} \;\; \kappa = \alpha - \beta > 0. \tag{1}$$

(a) (1,0 pt.) Encontre a solução $P(t)$ de (1) que satisfaz $P(0) = P_0$.

(b) (1,0 pt.) Encontre relações entre P_0, κ e m para que a população cresça exponencialmente, permanesça constante ou decresça.

(c) (0,5 pt.) Em 1847 a população de um certo país era de 8 milhões de habitantes a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade era de 1,6% da população. Devido a uma escassez de alimentos entre 1840 e 1850, em torno de 210 mil habitantes por ano emigraram. Nessa época a população daquele país estava crescendo ou declinando ?

Solução de (a):
1. Vamos resolver a EDO de primeira ordem linear $\frac{dP}{dt} - \kappa P = -m$ com valor inicial $P(0) = P_0$.
2. O fator integrante é $\mu = \exp(-\int \kappa dt) = \mathrm{e}^{-\kappa t}$.
3. Multiplicando a equação pelo fator integrante, obtemos:

$$\frac{d(\mathrm{e}^{-\kappa t}P(t))}{dt} = -m\mathrm{e}^{-\kappa t}$$

3. Integrando a relação anterior em t, segue que

$$\mathrm{e}^{-\kappa t}P(t) = -\int m\mathrm{e}^{-\kappa t}dt = \frac{m}{\kappa}\mathrm{e}^{-\kappa t} + C$$

4. Logo

$$P(t) = \frac{m}{\kappa} + Ce^{\kappa t} \quad (*)$$

5. Impondo o dado inicial $P(0) = P_0$ a (*), obtemos $C = P_0 - \frac{m}{\kappa}$ e

$$P(t) = \frac{m}{\kappa} + \left(P_0 - \frac{m}{\kappa}\right)e^{\kappa t}$$

Solução de (b):

$$\text{Condição para crescimento exponencial: } P_0 - \tfrac{m}{\kappa} > 0 \;\Rightarrow\; \kappa P_0 > m.$$

$$\text{Condição para população constante: } P_0 - \tfrac{m}{\kappa} = 0 \;\Rightarrow\; \kappa P_0 = m.$$

$$\text{Condição para decrescimento: } P_0 - \tfrac{m}{\kappa} < 0 \;\Rightarrow\; \kappa P_0 < m.$$

Solução de (c):
Nesse caso, $P_0 = 8.000.000$, $\kappa = 0,016$ e $m = 210.000$.

Assim, $\kappa P_0 = 128.000 < 210.000 = m$, o que implica um decrescimento da população.

Questão 2. (2,5 pt.) Resolva o problema de valores iniciais

$$y'' + 6y' + 5y = 2e^{-t}$$
$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

Solução:

1. O homogêneo associado: $y'' + 6y' + 5y = 0$.

2. Polinômio característico: $p_c(x) = x^2 + 6x + 5$

3. Raízes de $p_c(x) : r_1 = -5, \qquad r_2 = -1.$

4. Solução geral do homogêneo : $y_H(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-t}$.

5. $g(t) = 2e^{-t}$ é solução do homogêneo $\Longrightarrow y_p(t) = Ate^{-t}$.

6. Para o candidato acima: $\left\{ \begin{array}{rcc} y_p(t) & = & Ate^{-t} \\ y_p'(t) & = & Ae^{-t} - Ate^{-t} \\ y_p''(t) & = & -2Ae^{-t} + Ate^{-t} \end{array} \right.$

7. Escrevendo $2e^{-t} = y_p'' + 6y_p' + 5y_p$ temos
$2e^{-t} = 4Ae^{-t} \Longrightarrow A = \frac{1}{2} \Longrightarrow \quad y_p(t) = \frac{1}{2} te^{-t}$.

8. A solução geral é: $y(t) = y_H(t) + y_p(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} te^{-t}$ e substituindo $y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$ obtemos $c_1 = -\frac{1}{8}$ e $c_2 = \frac{1}{8}$. Portanto

$$y(t) = -\frac{1}{8} e^{-5t} + \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{2} te^{-t}.$$

Questão 3. Considere $\mathbf{r_1}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ e $\mathbf{r_2}(t) = (1, t^2, t^3)$, $t \geq 0$, os vetores posição de dois objetos.

(a) (0,5 pt.) Encontre todos os pontos de interseção das trajetórias dos dois objetos.

(b) (1,0 pt.) Determine as velocidades vetoriais e as velocidades escalares (rapidez) dos objetos nos pontos encontrados no item (a).

(c) (1,0 pt.) Calcule o distância percorrida pelo segundo objeto (cuja vetor posição é $\mathbf{r_2}$) entre os pontos (1,0,0) e (1,4,8).

Solução de (a):
1. Para encontrar os pontos de interseção das trajetórias, resoveremos o sistema:

$$\begin{cases} \cos t' &= 1 \\ \operatorname{sen} t' &= t^2 \\ t' &= t^3 \end{cases}$$

2. Da primeira equação obtemos $t' = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Assim, os únicos valores de t e t' que satizfazem as três equações simultaneamente são $t = t' = 0$.
3. Logo, o único ponto de interseção das trajetórias é
$\mathbf{r_1}(0) = \mathbf{r_2}(0) = (1, 0, 0)$.

Solução de (b):
$\mathbf{r_1'}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, $\mathbf{r_2'}(t) = (0, 2t, 3t^2)$.
No ponto (1,0,0):
Velocidades Vetoriais: $\mathbf{r_1'}(0) = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{r_2'}(0) = (0, 0, 0)$.
Velocidades Escalares: $\| \mathbf{r_1'}(0) \| = \sqrt{2}$ e $\| \mathbf{r_2'}(0) \| = 0$.

Solução de (c):
1. $\| \mathbf{r_2'}(t) \| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$, $t \geq 0$.
2. $\mathbf{r_2}(0) = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{r_2}(2) = (1, 4, 8)$.
3.

$$L_2 = \int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt = \frac{1}{18}\int_4^{40} \sqrt{u}\, du = \left[\frac{u^{3/2}}{27}\right]_{u=4}^{u=40} = \frac{80\sqrt{10} - 8}{27}.$$

Na integral acima utilizamos a substituição:

$$u = 4 + 9t^2; \;\; dt = \frac{du}{18t}$$
$$t = 0 \to u = 4;$$
$$t = 2 \to u = 40;$$

Questão 4. Um objeto se desloca no plano e sua posição no instante $t \geq 0$ é dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Se sua aceleração é dada por $-2\mathbf{r}(t)$ ($t \geq 0$) e no instante $t = 0$ o objeto parte do ponto (4,0) com velocidade inicial $\mathbf{v_0} = (0, 4)$, encontre:

(a) (1,5 pt.) As equações paramétricas da trajetória do objeto, isto é, o vetor $\mathbf{r}(t)$ ($t \geq 0$);

(b) (1,0 pt.) A equação cartesiana da trajetória do objeto e identifique a curva.

Solução de (a):
1. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \Longrightarrow \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) \Longrightarrow \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$.
2. Hipótese: $\mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t)) = (-2\ x(t), -2\ y(t)) = -2\mathbf{r}(t)$
3. Portanto temos:

$$\begin{cases} x''(t) &= -2\ x(t) \\ y''(t) &= -2\ y(t) \end{cases}$$

4. De $x''(t) = -2\ x(t)$ obtemos $x''(t) + 2\ x(t) = 0$ que é uma equação diferencial ordinária de ordem 2. Para resolve-la:

4.1. polinômio caracteristico $p_c(x) = x^2 + 2$ e suas raizes : $r = \pm\sqrt{2}\, i$.

4.2. solução geral: $x(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$.

4.3. como $\mathbf{r}(0) = (4, 0)$ e $\mathbf{r}'(0) = (0, 4)$ obtemos $c_1 = 4$ e $c_2 = 0$. Portanto $x(t) = 4\cos(\sqrt{2}t)$.

4.4. Do mesmo modo obtemos $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$ e utilizando $\mathbf{r}(0) = (4, 0)$ e $\mathbf{r}'(0) = (0, 4)$ obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 = 2\sqrt{2}$. Portanto $y(t) = 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)$.

5. Finalmente, $\mathbf{r}(t) = (4\cos(\sqrt{2}t), 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t))$.

Solução de (b):
Como $\mathbf{r}(t) = (4\cos(\sqrt{2}t), 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) = (x, y)$, obtemos

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1,$$

que é a equação de uma elipse.