Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Métodos Matemáticos
www.dmm.im.ufrj.br

Prova Final Unificada de Cálculo II

Escola Politécnica, Escola de Química e Instituto de Física

25/06/2009

1ª **Questão:** (2,0 pontos) (a) Determine a solução geral $y(x)$ da equação diferencial de primeira ordem

$$y' + y = 3e^x.$$

(b) Determine a solução geral $y(x)$ da equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + y = 0.$$

(c) Determine uma solução particular da equação diferencial

$$y'' + y = 8\cos(3x) - 2\,\mathrm{sen}\,(x).$$

(d) Utilize os itens (b) e (c) para determinar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = 8\cos(3x) - 2\,\mathrm{sen}\,(x) \\ \\ y(\pi/2) = -1, \quad y'(\pi/2) = -3. \end{cases}$$

2ª **Questão:** (2,0 pontos) Considere uma população $P(t)$ de bactérias, com o tempo t medido em dias e taxa de natalidade igual a α. Suponha que a taxa de variação da população em relação ao tempo é igual ao produto da taxa de natalidade pela população existente.
(a) Supondo α constante, determine a população $P(t)$.
(b) Utilizando o item (a) e supondo que uma população inicial dobra em oito dias, determine a constante α.
(c) Supondo $\alpha(t) = -1 + \cos t.\,\mathrm{sen}\,t$, determine a população $P(t)$.
(d) Utilizando o item (c) e supondo que a população inicial é o quadrado da população em oito dias, determine a população inicial.

3ª **Questão:** (3,0 pontos) Seja a função $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\sqrt{42 - 9x^2 - 4y^2}$.
(a) Determine a equação cartesiana do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y)$ no ponto $P_0 = (\dfrac{1}{3}, 2, \dfrac{5}{\sqrt{3}})$.
(b) Seja $F(s,t) = f(\dfrac{1}{3}s^2 - t, 2se^{3t})$. Utilize a regra da cadeia para determinar a taxa de variação de $F(s,t)$, no ponto $P_1 = (1,0)$, na direção do vetor $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
(c) Determine a equação cartesiana da curva de nível C, da função $f(x,y)$, que contém o ponto $P_2 = (1, \dfrac{3\sqrt{3}}{2})$.
(d) Determine as equações paramétricas da reta normal à curva C do item (c) no ponto P_2.

4ª **Questão:** (3,0 pontos) Sejam as superfícies $S_1 : z = x^2 + y^2$, $S_2 : 2x + y + z = 10$ e seja $\mathcal{C}$ a curva obtida interceptando-se S_1 com S_2.
(a) Determine e identifique as curvas obtidas interceptando-se S_1 com os planos $x = k$, $y = k$, $z = k$ (k constante real) e utilize para identificar e esboçar S_1.
(b) Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar as distâncias máxima e mínima de $\mathcal{C}$ ao plano xy.
(c) Determine as equações paramétricas da curva $\mathcal{C}$.
(d) Determine equações paramétricas da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto P_0 que está **mais próximo** do plano xy.