Gabarito da $2^{\underline{a}}$ Prova Unificada de Cálculo II
18/06/2009

$1^{\underline{a}}$ **Questão:** (a) $i)$ $x = 0:\ 0 = \dfrac{y^2}{4} + z^2,$ ponto $(0,0,0)$.

$ii)$ $x = \pm 1:\ 1 = \dfrac{y^2}{4} + z^2,$ elipse .

$iii)$ $y = 0:\ x^2 = z^2,$ par de retas concorrente na origem $z = \pm x$.

$iv)$ $y = \pm 1:\ x^2 - z^2 = 1/4,$ hipérbole.

$v)$ $z = 0:\ x^2 = \dfrac{y^2}{4},$ par de retas concorrentes na origem $y = \pm 2x$.

$vi)$ $z = \pm 1:\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1,$ hipérbole.

(b) Do item (a) conclui-se que S é um cone elíptico com vértice $(0,0,0)$ e eixo x.

(c) S é a superfície de nível de $F(x,y,z) = x^2 - \dfrac{y^2}{4} - z^2$ para o nível 0.

$$\vec{\nabla} F(x,y,z) = (2x, -\frac{y}{2}, -2z)$$
$$\vec{\nabla} F(\sqrt{2}, 2, -1) = (2\sqrt{2}, -1, 2)$$

Assim, uma equação cartesiana do plano tangente à S em P_0 é dada por

$$2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) - (y-2) + 2(z+1) = 0$$

ou

$$2\sqrt{2}x - y + 2z = 0.$$

A reta normal à S em P_0 é dada por

$$\vec{r}(t) = 0\vec{P}_0 + t\vec{\nabla} T(P_0) = (\sqrt{2}, 2, -1) + t(2\sqrt{2}, -1, 2),\ -\infty < t < +\infty.$$

Portanto,

$$x = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}t,\quad y = 2 - t,\quad z = -1 + 2t,\quad -\infty < t < +\infty,$$

são as equações paramétricas da reta normal à S em P_0.

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (a) Substituindo $z = 5 - y$ na equação da superfície $S:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 9 = 0$, obtemos a projeção de C sobre o plano xy

$$x^2 + 2y^2 - 6y + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 4(y - 3/2)^2 = 1$$

que é uma elipse, com parametrização: $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$
Logo, C admite a representação vetorial

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\vec{i} + \frac{3+\operatorname{sen} t}{2}\,\vec{j} + \frac{7-\operatorname{sen} t}{2}\,\vec{k},\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Portanto,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ y = \frac{3+\operatorname{sen} t}{2},\ z = \frac{7-\operatorname{sen} t}{2},\ \ 0 \le t \le 2\pi,$$

são as equações paramétricas da curva C.
(b) Como $0\vec{P}_0 = \vec{r}(\pi)$, o vetor tangente à curva C em P_0 é dado por $\vec{r}\,'(\pi)$.

$$\vec{r}\,'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \frac{1}{2}\cos t\,\vec{j} - \frac{1}{2}\cos t\,\vec{k} \ \text{ e } \ |\vec{r}\,'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\vec{r}\,'(\pi) = -\frac{1}{2}\,\vec{j} + \frac{1}{2}\,\vec{k}.$$

Assim, as equações paramétricas da reta tangente à C em P_0 são:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{3}{2} - \frac{t}{2},\ z = \frac{7}{2} + \frac{t}{2},\ -\infty < t < +\infty.$$

(c) O comprimento de C é dado por

$$L(C) = \int_0^{2\pi} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (a) Pela hipótese $\vec{\nabla}T(5,4,2) = (3,-1,1)$ e $\vec{r}\,(t) = (t^2+1, 2t, 10-t^3)$, $\vec{r}\,'(t) = (2t, 2, -3t^2)$ e $\vec{r}\,'(2) = (4,2,-12)$. Agora usando a regra da cadeia temos

$$\frac{dT}{dt}(2) = \vec{\nabla}T(5,4,2).\vec{r}\,'(2) = \vec{\nabla}T(5,4,2).(4,2,-12) = -2\ {}^\circ/s$$

(b) $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{(2,1,-2)}{3}$, assim a derivada direcional de T em P_0 na direção $\vec{u}$ é dada por

$$D_{\vec{u}}T(P_0) = (3,-1,1).(2,1,-2)/3 = 1^\circ/m,$$

portanto, sentirá mais calor já que a temperatura é crescente, pois a derivada é 1 (positiva), na direção definida pelo vetor $\vec{v}$.
(c) A direção na qual T decresce mais rapidamente em P_0 é aquela definida por $-\vec{\nabla}T(P_0) = (-3,1,-1)$ com versor $\vec{m} = (-3,1,-1)/\sqrt{11}$.

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (a) Determinamos os pontos críticos de $T(x,y,z)$ no interior de D.

$$T_x = 2 - 2x = 0,\ T_y = 4 - 4y = 0,\ T_z = 2 - 2z = 0$$

daí decorre $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$; assim $P_1 = (1,1,1)$ é o único ponto crítico de T no interior de D e $T(P_1) = 8$.

(b) Para determinar os pontos críticos de $T(x, y, z)$ na superfície do elipsóide aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange com uma restrição

$$\vec{\nabla} T(x, y, z) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y, z), \text{ com a restrição } g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 = 16,$$

isto dá as equações

$$(1) \quad 2 - 2x = 2\lambda x$$

$$(2) \quad 4 - 4y = 4\lambda y$$

$$(3) \quad 2 - 2z = 2\lambda z$$

e a restrição $g(x, y, z) = 16$ se torna

$$(4) \quad x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$$

das equações (1),(2) e (3) segue

$$(1 + \lambda)x = (1 + \lambda)y = (1 + \lambda)z$$

ou

$$x = y = z,$$

desde que $\lambda \neq -1$. Substituindo na equação (4) segue $4x^2 = 16$, ou $x = \pm 2$.
Portanto, os pontos críticos na superfície do elipsóide são $P_2 = (2, 2, 2)$ e $P_3 = (-2, -2, -2)$, nos quais T assume os valores máximo e mínimo 4 e -28, respectivamente.
(c) Como T é contínua em D (limitado e fechado), T deve assumir seus valores máximo e mínimo nele; comparando os valores de T nos pontos críticos obtidos nos itens (a) e (b) concluimos que os valores máximo e mínimo de T são 8 e -28, e são obtidos nos pontos P_1 e P_3, respectivamente.