Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Métodos Matemáticos
2^a Prova de Cálculo II - EE/EQ/IF- 2009/01

1^a **Questão:** (2,5 pontos) Seja S uma superfície cuja equação cartesiana é $x^2 = \dfrac{y^2}{4} + z^2$.

(a) Determine algebricamente, identifique e esboce as curvas obtidas interceptando-se S com os planos $x = 0$, $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pm 1$, $z = 0$ e $z = \pm 1$.

(b) Utilize as informações do item (a) para esboçar a superfície S.

(c) Determine equação cartesiana do plano tangente a S em $P_0(\sqrt{2}, 2, -1)$ e equações paramétricas da reta normal a S em P_0.

2^a **Questão:** (2,5 pontos) Seja C uma curva obtida interceptando-se a superfície $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 9 = 0$ com o plano $y + z = 5$.

(a) Determine uma parametrização para a curva C.

(b) Determine equações paramétricas da reta tangente à curva C no ponto $P_0(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

(c) Utilize a fórmula integral para o comprimento de arco, para determinar o comprimento da curva C.

3^a **Questão:** (2,5 pontos) Seja $T(x, y, z)$ uma função diferenciável e suponha que ela representa a temperatura em graus Celsius em cada ponto de uma sala (as dimensões x, y e z são medidas em metros). Suponha ainda que T possui as seguintes propriedades: $T(5, 4, 2) = 30^0$, $\frac{\partial T}{\partial x}(5, 4, 2) = 3^0/m$, $\frac{\partial T}{\partial y}(5, 4, 2) = -1^0/m$ e $\frac{\partial T}{\partial z}(5, 4, 2) = 1^0/m$. Uma mosca está voando por esta sala.

(a) Se a posição da mosca em cada instante t (dado em segundos) for representada pelo caminho $x = t^2 + 1$, $y = 2t$, $z = 10 - t^3$, determine a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo neste caminho, no instante $t = 2$ segundos.

(b) Se a mosca estiver no ponto $P_0(5, 4, 2)$ e voar na direção definida pelo vetor $\vec{v} = (2, 1, -2)$, determine a taxa de variação da temperatura nesta direção. Se a mosca escolher voar nesta direção, ela vai sentir mais ou menos calor do que no ponto P_0?

(c) Se a mosca escolher voar, a partir do ponto P_0 do item (b), seguindo a direção em que a temperatura decresce mais rapidamente, determine qual deverá ser esta direção.

4^a **Questão:** (2,5 pontos) Seja $T(x, y, z) = 4 + 2x + 4y + 2z - x^2 - 2y^2 - z^2$ a temperatura no elipsóide sólido $D = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 16 \,\}$.

(a) Determine os pontos críticos da função $T(x, y, z)$ no interior de D.

(b) Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos de temperatura máxima e mínima e o valor da temperatura máxima e mínima, na fronteira de D (isto é, na superfície do elipsóide sólido).

(c) Utilize os resultados dos itens (a) e (b) para determinar os pontos de temperatura máxima e mínima e o valor da temperatura máxima e mínima em D.