Gabarito da 1ª Prova Unificada de Cálculo II
30/04/2009

1ª **Questão:** (a) Dividindo ambos os lados da equação por x^2+1 obtemos

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{x^2+1}\,y = \frac{6x}{x^2+1}$$

que é linear com fator integrante

$$I(x) = \exp\,(\frac{3}{2}\ln(x^2+1)) = (x^2+1)^{3/2}$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por $I(x)$ temos

$$\frac{d}{dx}((x^2+1)^{3/2}y) = 6x(x^2+1)^{1/2}.$$

Integrando ambos os lados,

$$(x^2+1)^{3/2}y = 2(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = 2 + C(x^2+1)^{-3/2},\ C \in \mathbb{R}$$

(b) Substituindo $x = 0$ e $y = -2$ na solução geral obtida no item (a) temos

$$-2 = 2 + C, \text{ ou } C = -4.$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = 2 - 4(x^2+1)^{-3/2}$$

2ª **Questão:** $Q(t)$ = quantidade (em kg) de produtos químicos que permanece no tanque após t horas.

Taxa de entrada $= [(\frac{5+\operatorname{sen} t}{100})\text{ kg/l}][200\text{ l/h}] = (10 + 2\operatorname{sen} t)$ kg/h

Taxa de saída $= [(\frac{Q(t)}{1000})\text{ kg/l}][200\text{ l/h}] = \frac{Q(t)}{5}$ kg/h.
Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = 10 + 2\operatorname{sen} t - \frac{Q(t)}{5},$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{5}Q(t) = 10 + 2\operatorname{sen} t \qquad (1)$$

Fator integrante: $I(t) = \exp\int 1/5\,dt = e^{t/5}$.

Multiplicando a equação (1) pelo fator integrante, obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{t/5}\,Q(t)) = 10e^{t/5} + 2\,e^{t/5}\,\operatorname{sen} t,$$

$$e^{t/5}Q(t) = 10\int e^{t/5}\,dt + 2\int e^{t/5}\operatorname{sen} t\,dt.$$

$$e^{t/5}Q(t) = 50e^{t/5} + 2\int e^{t/5}\,\operatorname{sen} t\,dt \qquad (2)$$

Lembrando que: $\displaystyle\int e^{at} \ \operatorname{sen} t \, dt = \frac{e^{at}}{a^2+1}(a \operatorname{sen} t - \cos t) + C, \ \ C \in \mathbb{R}$

Segue,

$$\int e^{t/5} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{5}{26} e^{t/5} \operatorname{sen} t - \frac{25}{26} e^{t/5} \cos t + C. \quad (3)$$

Finalmente, substituindo (3) em (2), obtemos:

$$e^{t/5} Q(t) = 50 e^{t/5} + \frac{5}{13} e^{t/5} \ \operatorname{sen} t - \frac{25}{13} e^{t/5} \ \cos t + C,$$

$$Q(t) = 50 + \frac{5}{13} \operatorname{sen} t - \frac{25}{13} \cos t + C e^{-t/5}.$$

Como inicialmente a água no tanque era pura. $Q(0) = 0$, e daí,

$$0 = Q(0) = 50 - \frac{25}{13} + C, \ \text{ ou } \ C = -\frac{625}{13}.$$

Portanto,

$$Q(t) = 50 + \frac{5}{13} \operatorname{sen} t - \frac{25}{13} \cos t - \frac{625}{13} e^{-t/5}$$

que representa a quantidade (em kg) de produtos químicos no tanque após t horas.

3ª **Questão:** (a) A equação característica é

$$r^2 - 9 = 0, \ \ r_1 = -3 \ \text{ e } \ r_2 = 3$$

Portanto, a solução geral da equação homogênea é dada por

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}, \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(b) Do item (a) segue que uma solução particular y_p^1 para a equação

$$y'' - 9y = e^{3x} \qquad (1)$$

é da forma $y_p^1 = kxe^{3x}$, k a determinar.
Substituindo na equação (1) segue $k = \frac{1}{6}$. Agora procuramos uma solução particular y_p^2 da equação

$$y'' - 9y = 9x^2 \qquad (2)$$

y_p^2 deve ter a forma $y_p^2 = Lx^2 + Mx + N$, $\ L, M$ e N a determinar. Substituindo na equação (2) obtemos: $L = -1$, $M = 0$ e $N = -2/9$, e portanto, $y_p^2 = -x^2 - 2/9$. Logo, uma solução particular da equação dada é $y_p = y_p^1 + y_p^2 = \frac{x}{6}\, e^{3x} - (x^2 + 2/9)$.
A solução geral será

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} + \frac{x}{6}\, e^{3x} - (x^2 + \frac{2}{9}), \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(c) Do item (b) segue: $y' = -3c_1 e^{-3x} + 3c_2 e^{3x} + e^{3x}(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x) - 2x$

Substituindo $x = 0, y = 0$ e $y'(0) = \frac{1}{6}$, segue $c_1 = c_2 = \frac{1}{9}$.
Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1}{9}(e^{-3x} + e^{3x}) + \frac{x}{6}\, e^{3x} - (x^2 + \frac{2}{9}).$$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** (a) Para todo $c \geq 0$, a curva de nível é dada por

$$\sqrt{5 - 25x^2 + 5y^2} = c,$$

elevando ao quadrado ambos os lados da equação

$$5 - 25x^2 + 5y^2 = c^2,$$

ou

$$-25x^2 + 5y^2 = c^2 - 5 \qquad (1)$$

A equação (1) corresponde a uma hipérbole, exceto quando $c = \sqrt{5}$, em cujo caso obtemos o par de retas concorrentes $y = \pm\sqrt{5}\, x$, que são as assíntotas da família de hipérboles definidas pela equação (1).

(b) Para obter a superfície S, gráfico de f, observamos que a equação $z = \sqrt{5 - 25x^2 + 5y^2}$ é equivalente a

$$z^2 = 5 - 25x^2 + 5y^2, \;\; z \geq 0$$

ou

$$25x^2 - 5y^2 + z^2 = 5, \;\; z \geq 0 \qquad (2)$$

As seções com os planos $y = c,\; c$ constante, são semi-elipses e as seções com os planos $x = c,\; c$ constante, são hipérboles ou um par de semi-retas concorrentes ($c = \pm 1/\sqrt{5}$); do item (a) sabemos que as seções horizontais $z = c,\; c \geq 0$ são hipérboles ou um par de retas concorrentes. Portanto, S é a metade superior de um hiperbolóide de uma folha cujo eixo é o eixo y.

(c) Para parametrizar a curva C, interseção do semi-hiperbolóide da equação (2) do item (b) com o plano $y = 3$, substituimos $y = 3$ na equação (2), obtendo

$$25x^2 + z^2 = 50, \;\; z \geq 0$$

ou

$$\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{50} = 1, \;\; z \geq 0$$

que corresponde a uma semi-elipse no plano xz, com centro na origem e com semi-eixos $\sqrt{2}$ e $5\,\sqrt{2}$, respectivamente. Então uma parametrização de C é dada por

$$\vec{r}(t) = \sqrt{2}\, \cos t\, \vec{i} + 3\vec{j} + 5\,\sqrt{2}\, \operatorname{sen} t\, \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

(d) Se $P = (1, 3, 5)$, então $\vec{OP} = \vec{r}(\pi/4)$, por outra parte $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = -\sqrt{2}\operatorname{sen} t\, \vec{i} + 5\,\sqrt{2}\cos t\, \vec{k}$, e assim $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(\pi/4) = -\vec{i} + 5\vec{k}$.

Em consequência, as equações paramétricas da reta tangente a C no ponto $(1, 3, 5)$ são

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3, \qquad -\infty < t < +\infty \\ z = 5 + 5t \end{cases}$$