



1ª Prova Unificada de Cálculo II
Escola Politécnica, Escola de Química e Instituto de Física
30/04/2009

1ª Questão: (a) (2,0 pontos) Determine a solução geral explícita $y(x)$ da equação diferencial

$$(x^2 + 1)y' + 3xy = 6x.$$

(b) (0,5 pontos) Utilize o resultado do item (a) para obter a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y' + 3xy = 6x \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

2ª Questão: (2,5 pontos) Considere um tanque que possui, 1000 litros de água pura. Suponha que ele comece a receber produtos químicos, completamente diluídos em água, a uma taxa de 200 litros por hora, e que a concentração desses produtos na água que ali está entrando varia periodicamente com o tempo t (medido em horas), de acordo com a fórmula

$$f(t) = \frac{5 + \sin t}{100} \text{ quilogramas por litro.}$$

A solução então é misturada completamente e sai do tanque também à taxa de 200 litros por hora. Determine a quantidade de produtos químicos (em quilogramas) que permanece no tanque após t horas. Veja abaixo Lembrete. ¹

3ª Questão: (a) (0,5 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y'' - 9y = 0.$$

(b) (1,5 pontos) Utilize o resultado do item (a) para determinar a solução geral da equação

$$y'' - 9y = 9x^2 + e^{3x}.$$

(c) (0,5 pontos) Utilize o resultado do item (b) para determinar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 9y = 9x^2 + e^{3x} \\ y(0) = 0; y'(0) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

4ª Questão: Dada a função $f(x, y) = \sqrt{5 - 25x^2 + 5y^2}$.

(a) (0,5 pontos) Determine algebricamente e identifique as curvas de nível de $f(x, y)$.

(b) (0,8 pontos) Determine, justificando, um esboço para a superfície S que é o gráfico de $f(x, y)$.

(c) (0,7 pontos) Determine uma parametrização para a curva C obtida pela interseção de S com o plano $y = 3$.

(d) (0,5 pontos) Determine as equações paramétricas da reta tangente a C no ponto $(1, 3, 5)$.

¹ $\int e^{at} \sin t dt = \frac{1}{a^2+1} e^{at} (a \sin t - \cos t) + C, C \in \mathbb{R}, a \neq 0.$