Gabarito da Prova Final de Cálculo Diferencial e Integral II

Engenharia e Engenharia Química – 02/12/2008

1ª Questão:

(a) Fator de integração: $\mu(x) = e^{2e^x}$. Multiplicando este fator nos dois lados da equação, obtemos:

$$\left[y(x)e^{2e^x}\right]' = e^x e^{2e^x}.$$

Integrando de 0 a x a equação acima, obtemos:

$$e^{2e^x}y(x) - e^{2e^0}y(0) = \int_0^x e^\tau e^{2e^\tau}\, d\tau.$$

Assim, como $y(0) = 1$, obtemos

$$e^{2e^x}y(x) = e^2 + \int_0^x e^\tau e^{2e^\tau}\, d\tau. \qquad (*)$$

Calculando a integral acima pelo método de substituição:

$$u = 2e^\tau \quad \Rightarrow \quad du = 2e^\tau\, d\tau$$

$$\int_0^x e^\tau e^{2e^\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\int_2^{2e^x} e^u\, du = \frac{1}{2}e^u\Big|_2^{2e^x} = \frac{e^{2e^x} - e^2}{2}.$$

Substituido na equação $(*)$, temos

$$e^{2e^x}y(x) = e^2 + \frac{1}{2}\left[e^{2e^x} - e^2\right] \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}\left[1 + e^{2(1-e^x)}\right].$$

(b) Temos

$$\begin{cases} u'' - 4u' + 3u = 0 & v'' - 4v' - 12v = 0 \\ u(0) = 0 & v(0) = 0 \\ u'(0) = \alpha & v'(0) = \alpha \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)^2}{v(x)} = 32.$$

As equações características e as respectivas raízes, são:

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 1;$$
$$s^2 - 4s - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 6, \quad s_2 = -2.$$

As soluções gerais das EDO's homogêneas, são:

$$u(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x,$$
$$v(x) = D_1e^{6x} + D_2e^{-x}.$$

Impondo as condições iniciais, obtemos

$$\begin{aligned} u(0) &= C_1 + C_2 = 0, \\ u'(0) &= 3C_1 + C_2 = \alpha, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \alpha/2, \quad C_2 = -\alpha/2.$$

Logo,

$$u(x) = \frac{\alpha}{2}e^{3x} - \frac{\alpha}{2}e^{x}.$$

$$\begin{aligned} v(0) &= D_1 + D_2 = 0, \\ v'(0) &= 6D_1 - D_2 = \alpha, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_1 = \alpha/7, \quad D_2 = -\alpha/7.$$

Logo,

$$v(x) = \frac{\alpha}{7}e^{6x} - \frac{\alpha}{7}e^{-x}.$$

Assim,

$$\frac{u(x)^2}{v(x)} = \frac{7\alpha}{4}\left(\frac{e^{6x} - e^{4x} + e^{2x}}{e^{6x} - e^{-x}}\right) = \frac{7\alpha}{4}\left(\frac{1 - e^{-2x} + e^{-4x}}{1 - e^{-7x}}\right).$$

Por hipótese,

$$32 = \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)^2}{v(x)} = \frac{7\alpha}{4}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x} + e^{-4x}}{1 - e^{-7x}}\right).$$

Como $\lim_{x\to+\infty} e^{-kx} = 0$, qualquer que seja $k > 0$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x} + e^{-4x}}{1 - e^{-7x}} = 1.$$

Logo,

$$\frac{7}{4}\alpha = 32 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{128}{7}$$

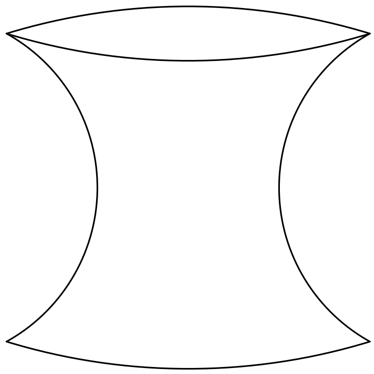
Assim, as soluções u e v são:

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{64}{7}e^{3x} - \dfrac{64}{7}e^{x}; \\ v(x) = \dfrac{128}{49}e^{6x} - \dfrac{128}{49}e^{-x}. \end{cases}$$

2ª Questão:

Temos $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $Q = (3, 1, 2)$.
(a) A superfície $\mathcal{S}$ é a superfície de nível 6, pois $f(3, 1, 2) = 9 + 1 - 4 = 6$. Logo a equação desta superfície é $x^2 + y^2 - z^2 = 6$. Ou ainda, explicitando z em função das outras variáveis, $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 6}$, isto é, um hiperbolóide de revolução de uma folha:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 6\}.$$



(b) O plano dado tem como vetor ortogonal o vetor $\vec{N}_1 = (4, 12, -8)$. A equação do plano tangente a $\mathcal{S}$ em um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Calculando as derivadas parcias, obtemos

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_0 = (x_0, y_0, -z_0).$$

Portanto, para que os planos sejam paralelos, seus vetores ortogonais têm de ser linearmente dependentes, isto é,

$$\vec{N}_0 = (x_0, y_0, -z_0) = \lambda \vec{N}_1 = \lambda(1, 3, -2) \quad \Rightarrow \quad x_0 = \lambda,\ y_0 = 3\lambda,\ z_0 = 2\lambda$$

Como $P_0 \in \mathcal{S}$, temos

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 9\lambda^2 - 4\lambda^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda \pm 1.$$

Logo, temos os pontos $P_0 = (1, 3, 2)$ ou $\widetilde{P}_0 = (-1, -3, -2)$. Os pontos da superfície $\mathcal{S}$ têm a coordenada z positiva. Logo o único ponto é P_0 e a equação do plano paralelo é

$$x + 3y - 2z = 3.$$

(c) A equação vetorial da reta normal a $\mathcal{S}$ passando pelo ponto Q, é

$$\vec{r}(\lambda) = \lambda \nabla f(Q) + Q.$$

Como $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$, temos $\nabla f(Q) = (6, 2, -4)$. Logo,

$$\vec{r}(\lambda) = (6\lambda + 3, 2\lambda + 1, -4\lambda + 2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(\lambda) = 6\lambda + 3, \\ y(\lambda) = 2\lambda + 1, \\ z(\lambda) = -4\lambda + 2. \end{cases}$$

(d) A reta $\vec{r}$ intersepta o plano $y = 0$ quando $2\lambda + 1 = 0$, isto é, $\lambda = -1/2$. Portanto, intersepta no ponto $R = (0, 0, 4)$.

3ª Questão:
Temos

$$f(x,y,z) = x + y + z, \qquad \mathcal{S} = \big\{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 2,\ x > 0,\ y > 0\ z > 0\big\}$$

Usando multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla G(x,y,z), \\ G(x,y,z) &= 2, \end{aligned}$$

onde estamos denotanto $G(x,y,z) = xyz$. Assim, temos

$$\begin{aligned} (1,1,1) &= \lambda(yz, xz, xy), \\ xyz &= 2, \end{aligned}$$

Temos, então,

$$\begin{cases} \lambda yz = 1, \\ \lambda xz = 1, \\ \lambda xy = 1, \\ xyz = 2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 0 \ \text{ e } \ yz = xz = xy = \frac{1}{\lambda}.$$

Portanto, $x = y = z$ e como $xyz = 2$, conclui-se que $x = y = z = \sqrt[3]{2}$.
Para concluir, mostremos que o ponto $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ é, de fato, ponto de mínimo de f sobre a superfície $\mathcal{S}$. Para isso, observemos que f não posui máximo sobre $\mathcal{S}$. De fato, considere, por exemplo, os pontos $P_s = (1, s, 2/s) \in \mathcal{S}$, com $s > 0$. Então $f(P_s) = 1 + s + 2/s \to +\infty$ se $s \to 0$.

4ª Questão: Temos

$$\begin{aligned} x(u,v) &= u^2 - 3v^2 \\ y(u,v) &= e^{u-v} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Big[(u,v) = (1,1) \ \Rightarrow \ (x,y) = (-2,1)\Big].$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2u\frac{\partial f}{\partial x} + e^{u-v}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -6v\frac{\partial f}{\partial x} - e^{u-v}\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Nos pontos dados, temos o sitema

$$\begin{cases} 5 = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,1) \\ 3 = -6\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,1) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = -2, \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = 9.$$