Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Métodos Matemáticos
Prova Final de Cálculo II - 2008/p2

1^a **Questão:** (3,0 pontos)

(a) (1,0 ponto) Encontre a solução da equação abaixo:

$$\begin{cases} y'(x) + 2e^x y(x) = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b) (2,0 pontos) Determine o valor da constante $\alpha \in \mathbb{R}$ sabendo-se que as funções $u(x)$ e $v(x)$ satisfazem o seguinte:

$$\begin{cases} u'' - 4u' + 3u = 0 \\ u(0) = 0 \ , \ u'(0) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} v'' - 4v' - 12v = 0 \\ v(0) = 0 \ , \ v'(0) = \alpha \end{cases} \quad \text{e} \ \lim_{x \to \infty} \frac{u(x)^2}{v(x)} = 32$$

2^a **Questão:** (2,0 pontos) Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $Q(3, 1, 2)$.

(a) Determine, identifique e esboce a superfície de nível S, da função $f(x, y, z)$, que contém Q.

(b) Determine o plano tangente a um ponto de S que seja paralelo ao plano $4x+12y-8z = 0$.

(c) Determine as equações paramétricas da reta normal a S em Q.

(d) Determine o ponto de interseção da reta do item (c) com o plano $y = 0$.

3^a **Questão:** (2,5 pontos)

(i) Seja $k > 0$. Encontre o mínimo da função $f(x, y, z) = x+y+z$, onde (x, y, z) pertence à superfície definida por $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ xyz = k \ , \ x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0\}$.

(ii) Use o item (i) para mostrar que $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x+y+z)$, para cada $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$, isto é, a média geométrica é menor ou igual à média aritmética.

4^a **Questão:** (2,5 pontos) Considere a função diferenciável $f(x, y)$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, sendo $x(u, v) = u^2 - 3v^2$ e $y(u, v) = e^{u-v}$. Seja $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, onde $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 1) = 5$ e $\frac{\partial F}{\partial v}(1, 1) = 3$. Determine os valores de $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, 1)$.