INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Resolução da 2ª Prova Unificada de Cálculo II**

Engenharia e Engenharia Química

**1ª Questão:** (2,5 pontos)

a)Temos $x^2 + y^2 + 3 = -4y$. Completando o quadro tem-se : $x^2 + (y + 2)^2 = 1$. É uma circunferência de raio igual a 1 e centro no ponto P=(0,-2).

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{8xy}{(x^2 + (y2 + 3)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4y^2 - 4x^2 - 12}{(x^2 + y^2 + 3)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = \dfrac{-1}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 0$

Assim, um vetor normal ao gráfico de f(x,y) no ponto P=(1,-2,) é dado por

$\vec{n} = \frac{-1}{4}\vec{i} + 0\vec{j} - 1\vec{k}$ ou $\vec{n} = \frac{1}{4}\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$.

A representação paramétrica da reta normal é dada por:

$$\begin{cases} x = 1 - (1/4)t \\ y = -2 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = 1 + (1/8)t \\ y = -2 \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

**2ª Questão:** (2,5 pontos)

b)Temos que $z = 4 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}$

regra da cadeia : $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

Como $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2x}{9}$ e $\dfrac{\partial z}{y} = \dfrac{-2y}{4}$ para x = 3 e y = 2 temos:

$\boxed{\dfrac{dz}{dt} = -4 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{16}{3} km/h}$.

c) A parte mais inclinada é na direção do vetor gradiente : $\vec{\nabla} z = \frac{-2x}{9}\vec{i} + \frac{y}{2}\vec{j}$, isto é, $\boxed{\vec{\nabla} z = \frac{-2}{3}\vec{i} + \frac{-1}{2}\vec{j}}$

d) $\|\vec{\nabla} z\| = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Isto é, $\tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{13}}{3}$.

**3ª Questão:** (2,5 pontos)

a)Fazendo $w(x,y,z) = x^2 + z^2 - e^{-2y}$ temos que $\vec{\nabla} w = 2x\,\vec{i} + 2e^{-2y}\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$.
Portanto, a equação de um plano tangente a superfície **S** e que passe pelo ponto (0,0,0) é

2x(x-0)+2e$^{-2y}(y-0) + 2z(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2z^2 + 2ye^{-2y} = 0.$

$Usandoofato$ : $x^2 + z^2 = e^{-2y}$ temos $2e^{-2y} + 2ye^{-2y} = 0$. Isto é, $\boxed{e^{-2y} + ye^{-2y} = 0}$

Portanto : y = -1.

Assim a solução são os pontos de **S** que satisfazem a :

$\boxed{\text{y= - 1}}$ e $\boxed{x^2 + z^2 = e^2}$.

b)Agora, o vetor $\vec{\nabla} w = 2x\,\vec{i} + 2e^{-2y}\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$, perpendicular ao plano pedido, deve ser perpenducular a $\vec{u} = 1\,\vec{i}.Portanto, devemoster:$ $\boxed{\text{2x=0}}$.

$Assim, doitemanteriortemosque: y = -1, x = 0e$ $\quad$ z= $\pm\, e$.

Temos 2 planos : $2e^2(y+1) + 2e(z-e) = 0$ e $2e^2(y+1) - 2e(z+e) = 0$. Ou seja,

$\boxed{\text{ey+z=0}}$ e $\boxed{\text{ey-z=0}}$.

**4ª Questão:** (2,5 pontos)

a)Para o interior do disco D ,isto é $(x-2)^2 + y^2 < 4$

$T_x = -x^2/4 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

$T_y = -y/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ . Assim temos dois candidatos a pontos críticos : $P_1 = (2,0)$ e $P_2 = (-2,0)$. O ponto $P_2 = (-2,0)$ não pertence a D.

b) Na fronteira $(x-2)^2 + y^2 = 4$ :

$G(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 4$ e G$_x = 2(x-2)$ $\quad G_y = 2y$. Usando multiplicador de Lagrange

$-x^2/4 + 1 = \lambda 2(x-2)$

- y/2 $= \lambda 2y$

i) Se $y = 0 \Rightarrow x = 0$ e temos os pontos $P_3 = (0,0)eP_4 = (4,0)$

ii) Se $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = -1/4$. Neste caso, $-x^2/4 + 1 = -1/2(x-2)$ , e temos os pontos $P_5 = (0,0)eP_6 = (2,2)$.

iii)Comparando os pontos encontrados acima : T(2,0)=11/6 , T(0,0)=1/2 , T(2,2)=5/6, T(4,0)=-5/6

Temperatura máxima em $P_1 = (2,0)$

Temperatura mínima em $P_4 = (4,0)$ .