Solução da 1ª Prova de Cálculo II

1ª QUESTÃO

Considere a equação diferencial $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 5x^2$ (1)
e a diferencial homogênea associada , isto é: $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$. (2)

Podemos encontrar a solução de (2) através do polinômio característico, que para esta equação é :

$r^2 + 2r + 5 = 0$ que tem por raízes $\begin{cases} r_1 & = & -1 + 2\,i \\ r_2 & = & -1 - 2\,i \end{cases}$

Asssim, a solução de (2) será
$y_h = ke^{-x}\sin 2x + k_1e^{-x}\cos 2x$ onde k e k_1 são constantes a serem determinadas futuramente.

A solucão particular da equação $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 5x^2$ é da forma :
$y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Substituindo $y_p(x)$ na eq. diferencial temos:
$5ax^2 + (4a + 5b)x + (2a + 2b + 5c) = 5x^2$

Resolvendo o sistema de equações:
$$\begin{cases} 5a & = & 5 \\ 4a + 5b & = & 0 \\ 2a + 2b + 5c & = 0 \end{cases}$$
Obtemos $\boxed{\text{a = 1 , b = -4/5 , c = -2/25}}$

Portanto, a solução de (1) é : $y(x) = ke^{-x}\sin 2x + k_1e^{-x}\cos 2x + x^2 - (4/5)x - 2/25$
Utilizando as condições iniciais y(0) = 1 e y'(0) = 1, podemos encontrar k e k_1 : k = 36/25 e $k_1 = 27/25$.

Assim, temos : $\boxed{y(x) = (e^{-x}/25)\{36\sin 2x + 27\cos 2x\} + x^2 - (4/5)x - 2/25}$

2^a QUESTÃO

Considere os triângulos semelhantes da figura ao lado. Temos que : $\dfrac{6}{18} = \dfrac{r(t)}{h(t)}$. Logo $r(t) = h(t)/3$.
Assim o volume V(t) do líquido no cone quando a altura deste for h(t) será :

$$V(t) = \frac{\pi h^3(t)}{27}.$$

A vazão V_z é igual a variação do volume de líquido no cone, portanto:

$$-\frac{\pi\sqrt{18h(t)}}{9} = \frac{dV(t)}{dt}$$

E após simplificação temos:

$$h'(t) = \frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{18h(t)}}{h^2(t)}$$

Resolvendo esta equação diferencial por separação de variáveis:

$$\frac{h^2}{\sqrt{18h}}\,dh = -dt$$

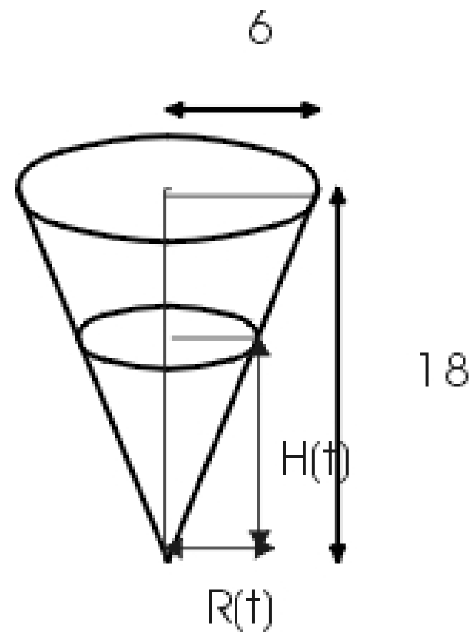
Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\frac{2}{5\sqrt{18}}h^{5/2}(t) = -t + C.$$

Quando t=0 temos $h(0) = 18$, assim C=$\frac{2}{5}18^2$

Portanto, $h^{5/2}(t) = \dfrac{5\sqrt{18}}{2}(-t + \dfrac{2}{5}18^2)$.

Para h=0, teremos o tempo $\boxed{\text{t}=\frac{2}{5}18^2}$.



3^a QUESTÃO

1. Podemos escrever: $\vec{r_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\vec{r_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, onde

$$R : \begin{cases} x_1(t) & = 1 + t \\ y_1(t) & = -2 + 3t \end{cases} \qquad (1)$$

$$P : \begin{cases} x_2(t) & = 1 - t \\ y_2(t) & = t^2 \end{cases} \qquad (2)$$

Em R temos $\mathrm{t} = \mathrm{x}_1 - 1$ e subtituindo em (1) obtemos $y_1 = 3x_1 - 5$.
Fazendo o mesmo em P temos $t = 1 - x_2$ e substituindo em (2) obtemos $y_2 = (1 - x_2)^2$.
Portanto, a tragetória da partícula R é uma reta e a da partícula P é uma parábola que se encontram quando $3x - 5 = (1 - x)^2$.
Resolvendo esta equação temos $\begin{cases} x & = & 2 \\ \overline{x} & = & 3. \end{cases}$

Assim, estas trajetórias se encontram nos pontos $\boxed{\text{A=(2,1)}}$ e $\boxed{\text{B=(3,4)}}$.

2. Caso elas se encontrassem teríamos $x_1(t) = x_2(t)$. Portanto, 1 + t = 1 - t e teríamos t=0. Logo, $y_1(t) \neq y_2(t)$. Assim, elas não podem se encontrar.

3. As velocidades escalares são:
$v_1 = \sqrt{(x_1')^2 + (y_1')^2}$ e
$v_2 = \sqrt{(x_2')^2 + (y_2')^2}$
Assim obtemos: $10 = 1 + 4t^2$, e em $\boxed{\text{t}=\pm 3/2}$ as partículas R e P têm a mesma velocidade escalar.

4^a QUESTÃO

I. A equação $x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4z = 6$ pode ser escrita como:
$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 11$
que representa uma esfera de raio $\sqrt{11}$, centrada no ponto P = (1,0,2)

II. Fazendo $\boxed{\text{z = 4 - y}}$ e substituindo na equação $x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4z = 6$ temos :
$(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 9$ que é **a projeção em XOY da interseção da esfera com o plano y+z = 4** .

Esta equação no plano XOY representa a elípse :

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{(3/\sqrt{2})^2} = 1$$

Assim, a parametrização da curva C em R^3pode ser dada por:

$$\begin{cases} x(t) &= 1 + 3\cos(t) \\ y(t) &= 1 + (3/\sqrt{2})\sin t \\ z(t) &= 3 - (3/\sqrt{2})\sin t \end{cases}$$

Como a interseção de um plano com uma esfera é uma circunferência, a curva C é uma circunferência no plano y+z=4.

O ponto A é tal que o parâmetro t vale zero, e para o ponto B temos t=π. Assim, a distância de A ao ponto B, ao longo de C é $\pi r = 3\pi$, já que o raio da circunfêrencia C vale 3.

III. O vetor $x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$, onde :

$$\begin{cases} x'(t) &= -3\sin(t) \\ y'(t) &= (3/\sqrt{2})\cos t \\ z'(t) &= -(3/\sqrt{2})\cos t \end{cases}$$

é tangente à curva C. Portanto, o vetor $\vec{u} = (3/\sqrt{2}\,)\vec{j} - (3/\sqrt{2}\,)\vec{k}$ é tangente à C no ponto A.
A reta tangente pode ser dada paramétricamente por:

$$\begin{cases} x(t) &= 4 \\ y(t) &= 1 + (3/\sqrt{2})t \\ z(t) &= 3 - (3/\sqrt{2})t \end{cases}$$