Questão 1: (2.5 pontos)

Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) (1.0 ponto) $t^3y'(t) + 4t^2y(t) = -e^{-t}$, satisfazendo $y(1) = 5e^{-1}$ e $t > 0$.

> **Solução:**
> Como $t < 0$, dividindo a equação por t^3 e analisando-a obtemos o fator integrante $\mu = t^4$. Multiplicando equação obtida pelo fator integrante e integrando obtemos $t^4y(t) = c + (1+t)e^{-t}$. Aplicando a condição $y(1) = 1$ obtemos que $c = 3e^{-1}$ e, portanto, $y(t) = \dfrac{3e^{-1} + (t+1)e^{-t}}{t^4}$

(b) (1.5 ponto) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 10t - 3$, satisfazendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 5$

> **Solução:**
> Resolvendo a equação característica vemos que as raízes são $2 \pm i$. A solução da homogênea será $y_h(t) = C_1e^{2t}\,\mathrm{sen}\,t + C_2e^{2t}\cos t$. Uma solução particular será da forma $y_p(t) = at + b$. Derivando e substituindo na EDO vemos que $y_p(t) = 2t + 1$ e, portanto, a solução geral é da forma $y(t) = C_1e^{2t}\,\mathrm{sen}\,t + C_2e^{2t}\cos t + 2t + 1$. Substituindo a condição inicial $y(0) = 1$ obtemos que $C_2 = 0$ e com a outra condição obtemos que $C_1 = 3$. Então $y(t) = 3e^{2t}\,\mathrm{sen}\,t + 2t + 1$

Questão 2: (2.5 pontos)

(a) (1.0 ponto) Seja $f(x, y)$ uma função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ com derivadas contínuas. Seja a curva σ dada pela função vetorial $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $x(t) = 3t + 3$, $y(t) = 2t - 1$ e a coordenada z dependendo das coordenadas x e y na forma $z(t) = f(x(t), y(t))$. Sabendo que $f(3, -1) = 2$, $f_x(3, -1) = 5$ e $f_y(3, -1) = 4$, encontre o vetor tangente à curva σ quando $t = 0$.

> **Solução:**
> Pela regra da cadeia, temos $z'(t) = f_x(x(t), y(t)).x'(t) + f_y(x(t), y(t)).y'(t)$. No ponto $t = 0$ obtemos $z'(0) = f_x(x(0), y(0)).x'(0) + f_y(x(0), y(0)).y'(0) = f_x(3, -1).3 + f_y(3, -1).2 = 5.3 + 4.2 = 23$. Então o vetor tangente será $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ e daí, $\sigma'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = (3, 2, 23)$

(b) (1.5 ponto) Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ parametrizações para as curvas em $\mathbb{R}^2$ que correspondem às trajetórias de duas partículas em função do tempo. Sabendo que $\alpha(t) = (t^2 - 3t + 2, 2t - 2)$ e $\beta(t) = (t - 2, t)$, com $t \geq 0$. Pergunta-se:

1. As partículas colidirão? Se colidirem, calcule em qual posição, tempo e também qual a velocidade vetorial de cada partícula neste instante.
2. A trajetória da primeira partícula tem ponto(s) em comum com a trajetória da segunda? Caso tenha, identifique todos estes pontos.

Solução:
(a): As partículas colidirão se no mesmo tempo t_0 ocuparem a mesma posição, isto é, $(t_0^2 - 3t_0 + 2, 2t_0 - 2) = (t_0 - 2, t_0)$. Resolvendo o sistema obtemos um única solução $t_0 = 2$, indicando que colidem no ponto $(0, 2)$ quanto $t = 2$. A velocidade vetorial das partículas será $\alpha'(2) = (1, 2)$ e $\beta'(2) = (1, 1)$.
(b): As trajetórias terão pontos comuns se em um tempo t_1 a partícula de trajetória $\alpha(t)$ ocupar a mesma posição que a partícula $\beta(t)$ no tempo t_2, isto é, $(t_1^2 - 3t_1 + 2, 2t_1 - 2) = (t_2 - 2, t_2)$. Resolvendo o sistema obtemos duas soluções, sendo que uma delas, como era esperado, é o ponto em que colidem, que ocorre quando $t_1 = t_2 = 2$. A outra solução ocorre quando $t_1 = 3$ e $t_2 = 4$, isto é, no ponto $(2, 4)$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$, para $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) (1.0 ponto) Verifique se existe o limite da $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$. Caso exista, qual o seu valor?

Solução:
Não existe, basta tomar $y = x$, que tem como limite o valor $1/2$ e $y = 0$ que tem como limite 0.

(b) (0.5 ponto) Calcule o gradiente da função $f(x,y)$ no ponto $(2,1)$

Solução:
Usando a regra do quociente temos que

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\left(xy(2y^3 - x^3), x^2(x^3 - 2y^3)\right).$$

Substituindo no ponto segue que $\nabla f(2,1) = \left(-\dfrac{4}{27}, \dfrac{8}{27}\right)$

(c) (0.3 ponto) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(2,1)$ na direção (e sentido) do vetor $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, isto é, calcule $D_uf(2,1)$.

Solução:
Temos que $D_uf(2,1) = \nabla f(2,1).u = \left(-\dfrac{4}{27}, \dfrac{8}{27}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{4}{9\sqrt{5}}$.

(d) (0.7 ponto) Encontre o plano tangente ao gráfico de f no ponto do gráfico correspondente a $x = 2$ e $y = 1$.

> **Solução:**
> Temos $z = f(2,1) = \dfrac{2^2}{2^3 + 1^3} = \dfrac{4}{9}$ e, então, a equação do plano será dada por $\left(-\dfrac{4}{27}, \dfrac{8}{27}, -1\right) \cdot \left(x - 2, y - 1, z - \dfrac{4}{9}\right) = 0$, isto é, $-4x + 8y - 27z = -12$

Questão 4: (2.5 pontos)

(a) (1.0 ponto) Seja S_1 a superfície que é o gráfico de $f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 4xy - 14x - 10y + 5$. Encontre seus pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e classifique-os em máximo local, mínimo local e sela.

> **Solução:**
> Como a função tem derivada contínua em todo o domínio, basta investigar os pontos em que $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Temos que $\nabla f(x,y) = (8x + 4y - 14, 4x + 8y - 10)$. Resolvendo obtemos que $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ é o único ponto crítico. Pelo teste da derivada segunda temos que $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$. Então como $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$, conclui-se que $(1,2)$ é um ponto de mínimo local.

(b) (1.5 ponto) Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos e o valor máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z$ **na curva** de interseção do plano $3x + 4y + z = 0$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
Obs. **Este item (b) DEVE ser resolvido utilizando multiplicadores de Lagrange. Só serão consideradas as respostas que utilizem esta técnica.**

> **Solução:**
> Procuramos o(s) ponto(s) de máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z$ quando esta está sujeita às restrições $g_1(x,y,z) = 0$ e $g_2(x,y,z) = 1$, sendo $g_1(x,y,z) = 3x + 4y + z$ e $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2$. Aplicar a técnica dos multiplicadores de Lagrange é encontrar ponto(s) (x_0, y_0, z_0) e contantes λ_1 e λ_2 que satisfaçam
>
> $$\begin{cases} \nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0,y_0,z_0) + \mu\lambda_2 g_2(x_0,y_0,z_0) \\ g_1(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0) = 1 \end{cases}$$

Como $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2)$, $\nabla g_1(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 1)$ e $\nabla g_2(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 0)$, obtém-se, facilmente, que $\lambda_1 = 2$ e daí temos o sistema

$$\begin{cases} -2\lambda_2 x_0 + 2x_0 = 6 \\ -2\lambda_2 y_0 + 2y_0 = 8 \\ 3x_0 + 4y_0 + z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

Temos que $\lambda_2 \neq 1$ pois isto tornaria a primeira equação impossível. Então temos que $x_0 = \dfrac{3}{1-\lambda_2}$ e $y_0 = \dfrac{4}{1-\lambda_2}$. Substituindo na última equação obtemos que $(1-\lambda_2)^2 = 25$, que acarreta que $\lambda_2 = 6$ ou $\lambda_2 = -4$.
Então, se $\lambda_2 = 6$ temos $x_0 = -\dfrac{3}{5}$, $y_0 = -\dfrac{4}{5}$ e, substituindo na equação do plano, $z_0 = 5$. Analogamente se $\lambda_2 = -4$ temos $x_0 = \dfrac{3}{5}$, $y_0 = \dfrac{4}{5}$ e $z_0 = -5$. Obtivemos dois pontos pela técnica dos multiplicadores de Lagrange: $P_1 = \left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, 5\right)$ e $P_2 = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, -5\right)$. Aplicando f nestes pontos obtemos $f\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, 5\right) = 11$ e $f\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, -5\right) = -9$. O mínimo absoluto ocorre, então, em P_2 e o máximo absoluto em P_1. Podemos afirmar que estes são, certamente, os pontos de máximo e mínimo absolutos pois a curva é fechada e limitada (está contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$).