Questão 1: (2.5 pontos)

Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) (1.0 ponto) $t^3y'(t) + 4t^2y(t) = -e^{-t}$, satisfazendo $y(1) = 5e^{-1}$ e $t > 0$.

(b) (1.5 ponto) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 10t - 3$, satisfazendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 5$

Questão 2: (2.5 pontos)

(a) (1.0 ponto) Seja $f(x, y)$ uma função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ com derivadas contínuas. Seja a curva σ dada pela função vetorial $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $x(t) = 3t + 3$, $y(t) = 2t - 1$ e a coordenada z dependendo das coordenadas x e y na forma $z(t) = f(x(t), y(t))$. Sabendo que $f(3, -1) = 2$, $f_x(3, -1) = 5$ e $f_y(3, -1) = 4$, encontre o vetor tangente à curva σ quando $t = 0$.

(b) (1.5 ponto) Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ parametrizações para as curvas em $\mathbb{R}^2$ que correspondem às trajetórias de duas partículas em função do tempo. Sabendo que $\alpha(t) = (t^2 - 3t + 2, 2t - 2)$ e $\beta(t) = (t - 2, t)$, com $t \geq 0$. Pergunta-se:

1. As partículas colidirão? Se colidirem, calcule em qual posição, tempo e também qual a velocidade vetorial de cada partícula neste instante.
2. A trajetória da primeira partícula tem ponto(s) em comum com a trajetória da segunda? Caso tenha, identifique todos estes pontos.

Questão 3: (2.5 pontos)

Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^3 + y^3}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) (1.0 ponto) Verifique se existe o limite da $f(x, y)$ quando (x, y) tende a $(0, 0)$. Caso exista, qual o seu valor?

(b) (0.5 ponto) Calcule o gradiente da função $f(x, y)$ no ponto $(2, 1)$

(c) (0.3 ponto) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(2, 1)$ na direção (e sentido) do vetor $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, isto é, calcule $D_uf(2, 1)$.

(d) (0.7 ponto) Encontre o plano tangente ao gráfico de f no ponto do gráfico correspondente a $x = 2$ e $y = 1$.

Questão 4: (2.5 pontos)

(a) (1.0 ponto) Seja S_1 a superfície que é o gráfico de $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 4xy - 14x - 10y + 5$. Encontre seus pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e classifique-os em máximo local, mínimo local e sela.

(b) (1.5 ponto) Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos e o valor máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$ **na curva** de interseção do plano $3x + 4y + z = 0$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Obs. **Este item (b) DEVE ser resolvido utilizando multiplicadores de Lagrange. Só serão consideradas as respostas que utilizem esta técnica.**

 Boa prova!