Questão 1: (2.5 pontos)

Faça o que se pede:

(a) (0.5 ponto) Seja $f(x,y) = 4x\cos(xy)$. Encontre a derivada direcional de f no ponto $(2,\pi)$ com relação à direção do vetor $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Solução:
O gradiente de f é dado por

$$\nabla f(x,y) = (4\cos(xy) - 4xy\,\mathrm{sen}(xy), -4x^2\,\mathrm{sen}(xy))$$

O vetor u é unitário e, portanto, temos que $D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0).u$. Tomando $(x_0,y_0) = (2,\pi)$ temos que $D_u f(2,\pi) = (4,0).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}$.

(b) (0.5 ponto) Qual é a menor taxa de variação da função $f(x,y)$ do item anterior no ponto $(2,\pi)$? Em que direção e sentido esta ocorre?

Solução:
A menor taxa de variação corresponde a $-|\nabla f(2,\pi)|$, isto é, -4. A direção em que ocorre a menor taxa de variação tem a direção e sentido do vetor $-\nabla f(2,\pi) = (-4,0)$, isto é, a direção do versor $(-1,0)$

(c) (1.5 ponto) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua e h uma função dada por $h(x,y) = e^{2x}g(x-3y)$. Mostre que $3h_x + h_y - 6h = 0$

Solução:
Aplicando a regra da cadeia obtemos $h_x = e^{2x}g'(x-3y) + 2e^{2x}g(x-3y)$. De forma análoga obtemos que $h_y = -3e^{2x}g'(x-3y)$. Das expressões anteriores obtemos que $3h_x + h_y = 6e^{2x}g(x-3y) = 6h$, mostrando o resultado.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja S_1 a superfície definida implicitamente pela equação $x^2 + 3y^2 + xz^2 = 12$.

(a) (1.0 ponto) Encontre o plano tangente à superfície S_1 no ponto $(2,0,2)$.

Solução:
Seja $F(x,y,z) := x^2 + 3y^2 + xz^2$. Então a superfície corresponde aos pontos que satisfazem $F(x,y,z) = 12$. Um vetor normal à superfície no ponto (x_0,y_0,z_0) é dado por $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = (2x_0 + z_0^2, 6y_0, 2x_0z_0)$. Aplicando no

ponto $(2, 0, 2)$ obtemos que um vetor normal é dado por $(8, 0, 8)$. Então o plano tangente tem equação $8(x-2)+0(y-0)+8(z-2) = 0$, isto é, $x+z = 4$.

(b) (1.5 ponto) Seja agora a superfície S_2 que corresponde ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 15$. Encontre uma parametrização para a reta tangente à curva de interseção das superfícies S_1 e S_2 no ponto $(0, 2, 1)$.

Solução:
A reta tangente à curva de interseção será, simultaneamente, ortogonal aos vetores normais às duas superfícies nos ponto considerado. Um vetor normal à superfície S_1 no ponto $(0, 2, 1)$ é $(1, 12, 0)$, obtido pelo mesmo procedimento do item anterior. Um vetor normal à superfície S_2 no ponto $(0, 2, 1)$ é dado por $(f_x(0, 2), f_y(0, 2), -1)$, isto é, $(0, 16, -1)$. Então um vetor tangente à curva de interseção será dado por $(1, 12, 0) \times (0, 16, -1) = (-12, 1, 16)$. A reta tangente será dada por $\mathbf{r}(t) = (-12t, 2 + t, 1 + 16t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Questão 3: (2.5 pontos)
Seja uma função f definida em D sendo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad -2 \leq y \leq 2\}$$

e

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x^3 + y^3 - 3x - 3y \end{aligned}$$

(a) (0.8 ponto) Encontre todos os pontos críticos no interior de D.

Solução:
A função tem infinitas derivadas em todo o $\mathbb{R}^2$ e, portanto, os pontos críticos serão somente os pontos do interior de D em que ∇f se anula. Como $\nabla f(x_0, y_0) = (3x_0^2 - 3, 3y_0^2 - 3)$, este se anulará quando $x_0 = \pm 1$ e $y_0 = \pm 1$. Analisando o domínio da função vemos os pontos críticos são somente $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (1, -1)$.

(b) (0.7 ponto) Identifique máximos locais, mínimos locais e pontos de sela no interior de D

Solução:
Temos que $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 0$ e $f_{yy} = 6y$. Pelo teste da derivada segunda vemos que o ponto $P_1 = (1, 1)$ é ponto de mínimo local pois $(f_{xy})^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$ e $f_{xx} > 0$ neste ponto. O ponto $P_2 = (1, -1)$ é ponto de sela pois $(f_{xy})^2 - f_{xx}f_{yy} > 0$ neste ponto.

(c) (1.0 ponto) Identifique o valor máximo absoluto, o valor mínimo absoluto e os pontos em que estes ocorrem

Solução:
Deveremos analisar as fronteiras de D. Temos $\partial D = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$, sendo $A = (0, -2)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 2)$ e $D = (2, -2)$.

- Estudo sobre $\overline{AB}$: Seja $g(y) = f(0, y) = y^3 - 3y$ para $-2 \leq y \leq 2$. A função $g(y)$ tem ponto críticos em $y = -1$ e $y = 1$, analisando a segunda derivada vemos que o ponto $y = -1$ é máximo local e $y = 1$ é mínimo local. Avaliando a função nestes pontos e também nos pontos de fronteira $y = 2$ e $y = -2$ obtemos que g tem mínimo igual a -2 atingido em $y = -2$ e $y = 1$ e máximo igual a 2 atingido em $y = -1$ e $y = 2$.

- Estudo sobre $\overline{BC}$: Seja $h(x) = f(x, 2) = x^3 - 3x + 2$ para $0 \leq x \leq 2$. Fazendo uma análise similar à realizada nos item anterior vemos que h tem mínimo igual a 0 atingido em $x = 1$ e máximo igual a 4 atingido em $x = 2$.

- Estudo sobre $\overline{CD}$: Seja $k(y) = f(2, y) = y^3 - 3y + 2$ para $-2 \leq y \leq 2$. Fazendo uma análise similar às realizadas no itens anteriores vemos que tem mínimo igual a 0 atingido em $y = -2$ e $y = 1$ e máximo igual a 4 atingido em $y = -1$ e $y = 2$.

- Estudo sobre $\overline{DA}$: Seja $l(x) = f(x, -2) = x^3 - 3x - 2$ para $0 \leq x \leq 2$. Fazendo uma análise similar às realizadas nos itens anteriores vemos que tem mínimo igual a -4 atingido em $x = 1$ e máximo igual a 0 atingido em $x = 2$.

Conclusão: no interior tínhamos um mínimo local em $P1 = (1, 1)$ com $f(P1) = -4$. Comparando com os resultados das fronteiras temos que o valor máximo global é 4 atingido nos pontos $(2, 2)$ e $(2, -1)$ e o valor mínimo global é -4 atingido em $(1, -2)$ e $(1, 1)$.

Questão 4: (2.5 pontos)
Uma indústria deseja fabricar caixas iguais em forma de paralelepípedo com volume por caixa igual a 128 unidades de volume. O material a ser utilizado na base tem custo de $R\$7,00$ por unidade de área, o material a ser usado nas paredes laterais tem custo de $R\$2,00$ por unidade de área e o material a ser usado na tampa tem custo de $R\$1,00$ por unidade de área. Encontre as dimensões da caixa com menor custo de material.
Obs. Resolver esta questão por multiplicadores de Lagrange. Só serão consideradas as respostas que utilizem esta técnica.

Solução:

Seja $f(x,y,z)$ a função que representa o custo do material para cada caixa. Então $f(x,y,z) = (7+1)xy + (2+2)xz + (2+2)yz = 8xy + 4xz + 4yz$, sendo x e y as dimensões da base da caixa e z a altura da caixa. Seja, também, $g(x,y,z)$ a função que representa o volume da caixa e daí temos $g(x,y,z) = xyz$. A restrição do volume nos leva a procurar minimizar o custo restrito à condição que $g(x,y,z) = 128$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange temos que encontrar ponto (x_0, y_0, z_0) e constante λ tais que $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$ e $g(x_0,y_0,z_0) = 128$. Como $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (8y_0 + 4z_0, 8x_0 + 4z_0, 4x_0 + 4y_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0,z_0) = (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$ temos que $(8y_0 + 4z_0, 8x_0 + 4z_0, 4x_0 + 4y_0) = \lambda(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$. Multiplicando a primeira equação deste sistema por x_0, a segunda por y_0 e a terceira por z_0 obtemos que $8x_0y_0 + 4x_0z_0 = 8x_0y_0 + 4y_0z_0 = 4x_0z_0 + 4y_0z_0$. Como todos os comprimentos tem de ser estritamente positivos, obtemos que $2x_0 = 2y_0 = z_0$. A restrição sobre o volume total implica que $2x_0^3 = 128$ e daí segue que $x_0 = 4$, $y_0 = 4$ e $z_0 = 8$.