Questão 1: (2.5 pontos)

Seja a equação diferencial ordinária $y'(t) = 2y(t)\,(y(t) - 1)$.

(a) (1.5 ponto) Obtenha a solução geral da EDO acima.

Solução:
Considerando $y \notin \{0, 1\}$, fazendo algum manuseio algébrico e aplicando frações parciais obtemos

$$\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) y' = 2.$$

Integrando com relação a t obtemos

$$\ln\left(\left|\frac{y-1}{y}\right|\right) = 2t + c_1.$$

Aplicando exponencial segue que

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = Ce^{2t}.$$

Então obtemos

$$y(t) = \frac{1}{1 - Ce^{2t}} \quad \text{se} \quad y(t) \notin \{0, 1\}$$

(b) (0.5 ponto) Sendo $y(0)$ tal que $0 < y(0) < 1$, calcule o limite da solução deste problema quando t tende a infinito.

Solução:
Seja $y_0 := y(0)$. Substituindo na expressão anterior vemos que

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)e^{2t}} \quad \text{se} \quad y(t) \notin \{0, 1\}.$$

Se $y_0 \in (0, 1)$ vemos que o denominador é estritamente positivo e tende a $+\infty$ quando t tende a infinito. Portanto a solução tende a zero quando t tende a infinito.

(c) (0.5 ponto) Suponha, agora, que $y(0) > 1$. Existe solução para o problema de valor inicial definida para todo $t > 0$? Justifique adequadamente.

Solução:
Analisando a expressão para a solução obtida no item anterior, vemos que o

denominador se anula para t satisfazendo $t_1 := \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y_0}{y_0-1}\right)$ e, portanto, a solução só existe quando $t < t_1$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja a equação diferencial ordinária $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f(t)$.

(a) (0.8 ponto) Considere $f(t) \equiv 0$. Encontre a solução geral desta equação diferencial ordinária.

Solução:
A equação característica é $r^2 - 4r + 4 = 0$, que tem raiz dupla igual a 2. Então a soluçao geral desta EDO homogênea será $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$.

(b) (1.7 ponto) Considere, agora, que $f(t) = t^2e^{3t}$, $y(0) = 6$ e $y'(0) = 15$. Encontre a solução para este problema de valor inicial.

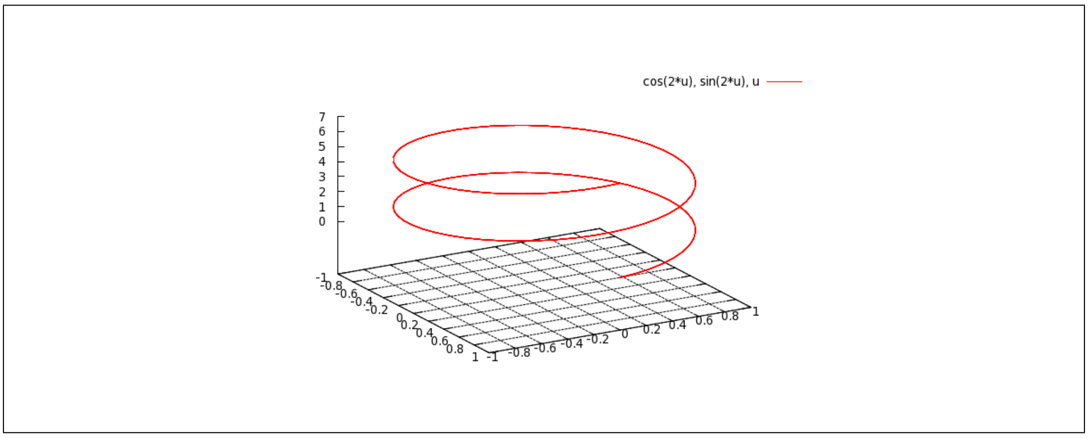
Solução:
Necessitamos encontrar a solução particular $y_p(t)$. Da forma do termo não homegêneo temos que $y_p(t)$ é da forma $y_p(t) = (at^2 + bt + c)e^{3t}$. Derivando obtemos $y_p{}'(t) = (3at^2 + (3b + 2a)t + b + 3c)e^{3t}$ e $y_p{}''(t) = (9at^2 + (9b + 12a)t + (2a + 6b + 9c))e^{3t}$. Substituindo na EDO e simplificando obtemos que $(at^2 + (4a + b)t + (2a + 2b + c) - t^2)e^{3t} = 0$. Conclui-se que $a = 1$, $b = -4$ e $c = 6$ e, portanto $y_p(t) = (t^2 - 4t + 6)e^{3t}$. Daí, temos que a solução geral da EDO não homogênea é dada por $y(t) = (t^2-4t+6)e^{3t} + c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. Como $y(0) = 6$ conclui-se que $c_1 = 0$. Derivando temos $y'(t) = (3t^2-10t+14)e^{3t} + c_2e^{2t} + 2c_2te^{2t}$. Como $y'(0) = 15$ vem que $c_2 = 1$ e $y(t) = (t^2-4t+6)e^{3t} + te^{2t}$.

Questão 3: (3.0 pontos)

Seja uma partícula cuja posição no espaço ao longo do tempo é descrita pela função vetorial $\mathbf{s}(t) = (\cos(2t), \mathrm{sen}(2t), t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

(a) (0.5 ponto) Faça um esboço da trajetória percorrida pela partícula.

Solução:



(b) (1.0 ponto) Calcule o comprimento de arco (distância percorrida pela partícula) entre os tempos $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \pi$.

Solução:
Temos que $\mathbf{s}'(t) = (-2\,\text{sen}(2t), 2\cos(2t), 1)$ e, portanto $\|\mathbf{s}'(t)\| = \sqrt{5}$. Então o comprimento é dado pela integral $l = \int_{\pi/4}^{\pi} \sqrt{5}dt = \frac{3\sqrt{5}}{4}\pi$

(c) (1.0 ponto) Encontre a reta tangente à curva descrita pela partícula no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Solução:
Por comparação vemos que o ponto corresponde a $t = \pi/6$. O vetor direção da reta é o vetor $\mathbf{s}'(\pi/6) = (-2\,\text{sen}(\frac{2\pi}{6}), 2\cos(\frac{2\pi}{6}), 1)$, isto é, um vetor tangente à reta é dado por $(-\sqrt{3}, 1, 1)$ e a equação paramétrica da reta é $\mathbf{r}(t) = \left(-\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right), t - \frac{\sqrt{3}}{2}, t - \frac{\pi}{6}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

(d) (0.5 ponto) Calcule a velocidade e aceleração da partícula.

Solução:
$\mathbf{v} = \mathbf{s}'(t) = (-2\,\text{sen}(2t), 2\cos(2t), 1)$ e $\mathbf{a} = \mathbf{s}''(t) = (-4\cos(2t), -4\,\text{sen}(2t), 0)$

Questão 4: (2.0 pontos)
Seja a curva C obtida pela interseção da quádrica $2x^2 + y^2 + 2y + z^2 = 9$ com o plano $y + z = 1$.

(a) (0.5 ponto) Identifique a quádrica

Solução:
Completando quadrado temos $2x^2 + 2(y + 1/2)^2 + z^2 = 8.5$, isto é, trata-se de um elipsóide com centro no ponto $(0, -1/2, 0)$

(b) (1.5 ponto) Encontre uma parametrização para a curva C (sugestão: encontre a projeção da curva no plano coordenado xy)

Solução:
Da equação do plano temos que $z = 1 - y$. Substituindo na equação do elipsóide temos que $2x^2 + y^2 + 2y + (1 - y)^2 = 9$. Simplificando obtemos $2x^2+2y^2 = 8$, isto é, a projeção da curva no plano coordenado xy é um círculo de centro na origem e raio 2. Então, uma parametrização para a curva será $\sigma(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 1 - 2\,\mathrm{sen}(t)$, com $t \in [0, 2\pi]$; a função coordenada $z(t)$ foi obtida substituindo a função coordenada $y(t)$ na equação do plano.