TEMPO DE PROVA: 2h.

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1 (2.5 pontos):
Determine a solução geral da equação diferencial $xy' + 3y = 4x^2 - 3x$, $x > 0$.

Solução:

Para reescrever a equação na forma padrão podemos dividir por x nos dois lados da equação já que $x > 0$. Temos que

$$y' + \frac{3}{x}y = 4x - 3.$$

Portanto $p(x) = \dfrac{3}{x}$ e $q(x) = 4x - 3$.
O fator de integração é $I(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3$. Multiplicando ambos lados da equação $y' + \dfrac{3}{x}y = 4x - 3$ por $I(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} x^3y' + x^3\frac{3}{x}y &= x^3(4x-3) \\ x^3y' + 3x^2y &= 4x^4 - 3x^3 \\ \frac{d}{dx}(x^3y) &= 4x^4 - 3x^3. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados da equação

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}(x^3y)dx &= \int (4x^4 - 3x^3)dx \\ x^3y &= \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + C \\ y &= \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{C}{x^3}. \end{aligned}$$

Questão 2 (2.5 pontos):
Escreva a equação do plano Π que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 1, 4)$ e $P_2 = (1, 0, 3)$ e que é perpendicular ao plano de equação $4x - y + 3z = 2$.

Solução:

Sabemos que $\mathbf{v} = (4, -1, 3)$ é vetor ortogonal ao plano $4x - y + 3z = 2$. Se o plano Π contém os pontos P_1 e P_2, então o vetor $\mathbf{u} = P_2 - P_1 = (3, -1, -1)$ é paralelo ao plano Π. Se $\vec{N}$ é um vetor ortogonal ao plano Π, então $\vec{N}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, $\vec{N}$ é múltiplo não nulo de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
Calculando:

$$\vec{N} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 1\mathbf{k} = (-4, -13, 1).$$

Assim, tomando P_1 como um dos pontos contidos em Π, temos a equação:

$$\vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}_1) = 0 \iff -4x - 13y + z = -1.$$

Questão 3 (2.5 pontos):
Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_0 = (2, 2)$. Calcule:

(a) A taxa de variação de f em P_0, na direção unitária correspondente ao vetor $\vec{u} = (1, 1)$;

(b) A taxa de variação de f em P_0, na direção unitária correspondente ao vetor tangente à curva $g(t) = (t, t^2 - t)$ no ponto $(3, 6)$.

Solução:

(a) Sendo f uma função diferenciável, sabemos que a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário $\hat{u}$ pode ser calculada pelo produto escalar $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \hat{u}$. No caso, $\nabla f(2, 2) = (4, 2)$ e $\hat{u} = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$. Portanto,

$$\nabla f(2, 2) \cdot \hat{u} = (4, 2) \cdot (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}.$$

(b) Sendo $g(t) = (t, t^2 - t)$, segue que

$$g(t_0) = (3, 6) \iff t_0 = 3.$$

Como o vetor tangente à curva no instante t_0 é $g'(t_0) = (1, 2t_0 - 1)$, temos $g'(3) = (1, 5)$. Então, o vetor unitário na direção de $(1, 5)$ é $\hat{u} = (1/\sqrt{26},\ 5/\sqrt{26})$, de modo que a derivada direcional na direção de $(1, 5)$ é

$$\nabla f(2, 2) \cdot \hat{u} = (4, 2) \cdot (1/\sqrt{26},\ 5/\sqrt{26}) = \frac{14}{\sqrt{26}} = \frac{7\sqrt{26}}{13}.$$

Questão 4 (2.5 pontos):
Determine os máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$.

Solução:
Calculando as derivadas parciais de $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{y/2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y/2} + \frac{1}{2}(x^2 + y)e^{y/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y + 2)e^{y/2}\,.$$

Determinamos agora os pontos críticos de f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xe^{y/2} = 0 \\ \dfrac{1}{2}(x^2+y+2)e^{y/2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ (x^2+y+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Logo $(0,-2)$ é o único ponto crítico da f. Calculando as derivadas parciais de 2a ordem.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{y/2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xe^{y/2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}e^{y/2} + \frac{1}{4}(x^2+y+2)e^{y/2} = \frac{1}{4}(x^2+y+4)e^{y/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2) = 2e^{-1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-2) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-2) = \frac{1}{2}e^{-1}$$

Computando o Hessiano, obtemos

$$D(0,-2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-2)\right)^2 = e^{-2} > 0\,.$$

Além disso $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2) = 2e^{-1} > 0$. Logo, pelo teste da segunda derivada, o ponto $(0,-2)$ é um mínimo local.