TEMPO DE PROVA: 2h.

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1 (2.5 pontos):
Calcule a solução da equação $y'' - 2y' + y = x$ que satisfaz as seguintes condições iniciais: $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$.

Solução:
O polinômio característico da equação é: $r^2 - 2r + 1$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 1$. Logo a solução da equação homogênea correspondente é:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Como o termo não homogêneo da equação é um polinômio de grau 1 e não tem relação com as exponenciais da solução homogênea, o método dos coeficientes a determinar indica que a solução particular é também um polinômio do primeiro grau, isto é, $y_p(x) = Ax + B$, cujos coeficientes podem ser determinados pela equação dada. Portanto,

$$y_p(x) = Ax + B \ \Rightarrow \ y_p'(x) = A \ \Rightarrow \ y_p''(x) = 0.$$

Substituido na equação, obtemos

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = -2A + (Ax + B) = x \ \Rightarrow \ Ax + (B - 2A) = x \ \Rightarrow \ A = 1, \ B = 2.$$

Portanto, a solução geral é $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x + 2$. Vamos agora determinar as constantes C_1 e C_2 para as quais a solução procurada satisfaça as condições iniciais.

- $y(0) = C_1 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1;$
- $y'(0) = (C_1 + C_2) + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1.$

Portanto, a solução procurada é $y(x) = e^x - xe^x + x + 2$.

Questão 2 (2.5 pontos):
Dadas as superfícies: $x^2 + y^2 = 16$ e $x + z = 5$.

(a) Classifique-as.

(b) Parametrize a curva σ obtida pela interseção das superfícies.

(c) Encontre a reta tangente à curva σ no ponto $P = (0, 4, 5)$.

Solução:

(a) $x^2 + y^2 = 16$ é um cilindro circular e $x + z = 5$ é um plano.

(b) Seja σ a curva de interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ com o plano $x + z = 5$. Note que a projeção da curva σ no plano xy é o círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$. Logo podemos escrever $x = 4\cos t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\, t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Da equação do plano, temos que $z = 5 - x = 5 - 4\cos t$, portanto as equações paramétricas de σ são:

$$\sigma(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t, 5 - 4\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

.

(c) Primeiramente, o ponto P ocorre para $t = \dfrac{\pi}{2}$. Derivando $\sigma(t)$ encontramos

$$\sigma'(t) = (-4\,\mathrm{sen}(t), 4\cos(t), 4\,\mathrm{sen}(t))$$

Atribuindo $t = \dfrac{\pi}{2}$, obtemos o vetor $v = (-4, 0, 4)$, diretor da reta tangente buscada. Com isso, uma parametrização para a reta tangente buscada é

$$p(t) = P + vt = (-4t, 4, 5 + 4t)\ .$$

Questão 3 (2.5 pontos):

Calcule o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,(x - y)}{x^4 + y^4}$

Solução:

(a) Multiplicando acima e embaixo pelo conjugado,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{(x^2 + y^2 + 1) - 1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 + y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right) = 2$$

(b) Calculando o limite ao longo da parábola $y = mx^2$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{xy\,(x - y)}{x^4 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3\,(x - mx^2)}{x^4 + m^4x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4(1 - mx)}{x^4(1 + m^4x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m(1 - mx)}{(1 + m^4x^2)} = m, \text{ portanto o limite não existe.}$$

Questão 4 (2.5 pontos):

Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos e os respectivos valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ definida no conjunto

$$D = \{(x, y)\,;\,(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1\}.$$

Solução:

Analisando os pontos críticos de f:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \iff x = y = 0.$$

Portanto, o único ponto crítico é $P_0 = (0, 0)$ que não pertence a D.

Como a função é contínua e D é fechado e limitado, os pontos de máximo e mínimo de f estão localizados na fronteira de D. Assim, pelo Método de Lagrange, nos pontos de máximo e mínimo temos a relação $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, onde

$$g(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2.$$

Assim, obtemos as equações

$$2x = 2\lambda(x-2), \quad 2y = 2\lambda(y-2), \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

Das duas primeiras equações, temos

$$\lambda = \frac{x}{x-2} = \frac{y}{y-2} \iff x = y.$$

Substituindo na terceira equação, obttemos

$$2(x-2)^2 = 1 \iff |x-2| = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como $x = y$, obtemos os pontos

$$P_1 = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Observando que

$$f(P_1) = 2\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9 + 4\sqrt{2} \quad \text{e} \quad f(P_2) = 2\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9 - 4\sqrt{2},$$

concluímos que P_1 e P_2 são respectivamente os pontos de máximo e mínimno absolutos, com os respectivos valores extremos $9 + 4\sqrt{2}$ e $9 - 4\sqrt{2}$.