TEMPO DE PROVA: 2h.

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1 (2.5 pontos):

Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável em $(1,2)$ tal que $f(1,2)=7$. Sabe-se também os valores das derivadas direcionais $D_u f(1,2)=11$ e $D_v f(1,2)=-2$, onde $u=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ e $v=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

a) Calcule $\bigtriangledown f(1,2)$.

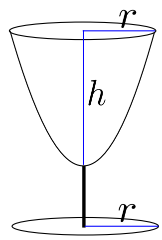
b) Ache a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,7)$.

c) Qual o valor máximo que uma derivada direcional de f no ponto $(1,2)$, avaliada em um vetor unitário, pode assumir?

Questão 2 (2.5 pontos):

Temos uma taça, cujo topo é descrito por uma superfície de revolução, onde a altura h se relaciona com o raio r, via $h=cr^3$, para alguma constante c, veja figura abaixo. Temos que o volume é dado pela expressão abaixo:

$$V(r,h)=\frac{3\pi r^2 h}{5}$$
$$h=cr^3$$



Enchemos a taça com vinho suavemente, de modo que o volume, a altura e o raio do topo do líquido variam com o tempo t.

a) Usando que $h=cr^3$, encontre uma relação entre a taxa de variação da altura $h'(t)$, com a taxa de variação do raio $r'(t)$, em termos de $r(t), h(t)$ e da constante c.

b) Sabendo que enchemos a taça a uma taxa de volume constante igual a $\frac{\pi}{4}cm^3/s$ e que no instante em que a altura é $0,5cm$, medimos a taxa de variação da altura em $1cm/s$, determine o raio naquele instante e, consequentemente o valor da constante c que descreve o formato da taça.

Questão 3 (2.5 pontos):

Encontre e classifique todos os pontos críticos da função:

$$f(x,y)=\cos(x)+y^2\,.$$

Questão 4 (2.5 pontos):

Determine os valores extremos absolutos de $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ na região

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2+xy\leq 1\}\,.$$