

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática - Departamento de Matemática
Prova de Segunda Chamada - Cálculo II Unificado - 2015/2
10/03/2016

Questão 1. Resolva (para $x > 0$)

$$xy'' + 2y' = x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Sugestão: Faça uma mudança de variável.

Solução:

Fazendo $z = y'$ obtemos uma equação diferencial de 1ª ordem em z :

$$xz' + 2z = x \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad z' + \frac{2}{x}z = 1.$$

Um fator integrante é x^2 logo

$$(x^2 z)' = x^2, \quad z = \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}.$$

Como $z(1) = 1$, resulta que $C = 2/3$, ou seja,

$$y' = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x^2}.$$

Integrando e usando $y(1) = 0$, obtemos

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{3x} + \frac{5}{12}.$$

Questão 2. Considere a equação diferencial

$$y'' + ay' + by = e^{2x}, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Sabendo-se que a solução geral da equação homogênea é $y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, determine os valores de a e b e calcule a sua solução particular.

Solução:

(a) A equação característica é: $r^2 + ar + b = 0$. Sabemos da teoria das EDOs de segunda ordem que se as raízes da equação característica são números complexos conjugados $r_1 = \alpha + \beta$ e $r_2 = \alpha - \beta$, então a solução da equação homogênea é da forma

$$y_h(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)).$$

Como no enunciado afirma-se que a solução da equação homogênea é

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

, então as raízes da equação característica são os números complexos conjugados: $r_1 = 0 + 2i$ e $r_2 = 0 - 2i$, isto é, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Logo

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = (r - 2i)(r + 2i) = r^2 + 4,$$

de onde se conclui que $a = 0$ e $b = 4$.

(b) Como o termo não homogêneo é e^{2x} e $r = 2$ não é raiz da equação característica, o método de determinação de parâmetros sugere a busca de solução particular da forma $y_p(x) = Ae^{2x}$. Assim,

$$y_p(x) = Ae^{2x} \Rightarrow y_p'(x) = 2Ae^{2x} \Rightarrow y_p''(x) = 4Ae^{2x}.$$

Substituindo na equação com os valores de a e b já calculados no item anterior, temos

$$y_p''(x) + 4y_p(x) = 8Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{8}.$$

Questão 3. Encontre os valores das constantes positivas a e b , tais que o plano tangente ao elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4} = 3,$$

no ponto $P = (a, b, 2)$ seja paralelo ao plano $x + 6y + z = 9$.

Solução:

Seja $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{4}$. Como $f(a, b, 2) = 3$, segue que $P \in S$, onde S é o elipsóide. Para que o plano dado seja paralelo a S e, P , a condição ③ que $\nabla f(P) = (2/a, 2/b, 1)$ seja paralelo a $\mathbf{n} = (1, 6, 1)$, onde $\mathbf{n}$ é normal ao plano. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} &= \lambda \\ \frac{2}{b} &= 6\lambda \\ 1 &= \lambda \end{aligned}$$

Logo, $a = 2$ e $b = 1/3$.

Questão 4. Considere a função $f(x, y) = x + y^2$ definida sobre a região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y \geq |x| \}.$$

- (a) Esboce a região D .
- (b) Encontre o maior e o menor valor de f em D .

Solução:

$$\nabla f(x,y) = (1, 2y) \text{ . Não tem pto crítico}$$

Se $g(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ é curva de nível de g .

- Sobre o trecho da fronteira $x^2 + y^2 = 1$, $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \Rightarrow 2y(\lambda - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$y = 0 \mid x = \pm 1 : (\pm 1, 0) \notin D$$

$$\lambda = 1 \mid x = 1/2 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Apenas } P_1 = (1/2, \sqrt{3}/2) \in D$$

As extremidades são: $P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

- Segmento $y = x$, $x \in [0, \sqrt{2}/2]$:

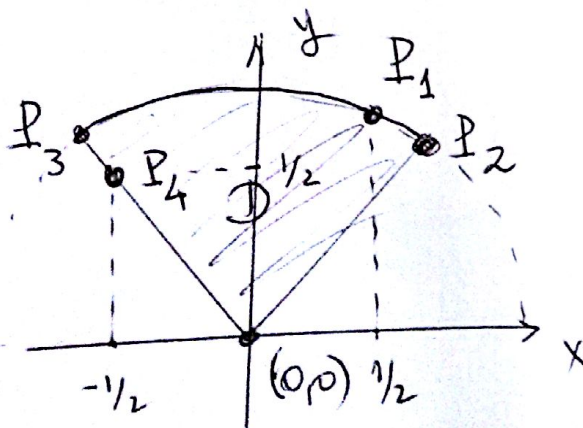
$h(x) = f(x, x) = x + x^2$ não tem pto crítico.

Temos que considerar a extremidade $(0, 0)$

- Segmento $y = -x$, $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$.

$$u(x) = f(x, -x) = x + x^2 \Rightarrow u'(x) = 1 + 2x = 0$$

$$\begin{cases} x = -1/2, y = 1/2 \\ P_4 = (-1/2, 1/2) \end{cases}$$



$$f(0,0) = 0$$

$$f(P_1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad \leftarrow \text{max}$$

$$f(P_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(P_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{min} \rightarrow f(P_4) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\{\sqrt{2} \approx 1,4142\}$$