1. Um tanque contém inicialmente 6 L de água salgada com concentração de sal 0,1 Kg/L. Em cada instante t seguinte (t em minutos), entra no tanque água pura a uma taxa de 1 L/min, enquanto que a mistura homogênea sai do tanque a uma taxa de 2 L/min. Seja $y(t)$ (em Kg) a quantidade de sal no tanque no instante t. Se t_0 é o instante exato em que o tanque fica vazio, quanto vale $y(t_0/3)$?

(a) $\frac{4}{15}$ Kg
(b) $\frac{2}{17}$ Kg
(c) 0,15 Kg
(d) 0,05 Kg
(e) 0,30 Kg

2. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

É correto afirmar que:

(a) f não é contínua na origem e f tem derivadas parciais na origem
(b) f é contínua na origem e f tem derivadas parciais na origem
(c) f é diferenciável na origem e f tem derivadas parciais na origem
(d) f não é diferenciável na origem e f não tem derivadas parciais na origem
(e) f não é contínua na origem e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe

3. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = -2$, $f_y(0,0) = 3$, $f_x(1,1) = 3$ e $f_y(1,1) = 1$. Seja

$$g(x,y) = f\left(f(x,y)^2, e^x\right).$$

Então $g_x(0,0)$ é:

(a) -11
(b) 9
(c) 11
(d) 19
(e) -15

4. Considere a equação diferencial vetorial

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x \end{cases}$$

com condição inicial $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$. Quanto vale $x(2)$?

(a) $3e^2$
(b) $2e$
(c) e^2
(d) $3e$
(e) $2e^4$

5. Seja $f(x,y,z) = 2x + y + z$. Seja $\mathcal{C}$ a curva dada pela interseção das 2 superfícies de equações

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad 2x - 2y + z = 2.$$

Então, os valores máximo e mínimo de f em $\mathcal{C}$ são, respectivamente:
(Sugestão: Parametrize $\mathcal{C}$)

(a) 11 e -1
(b) 12 e 0
(c) 10 e -2
(d) 12 e -2
(e) 10 e 0

6. Seja $f(x,y) = x^2 + y^4$. Então:

(a) $(0,0)$ é ponto de mínimo local de f
(b) $(0,0)$ é ponto de máximo local de f
(c) $(0,0)$ é ponto de sela de f
(d) $(0,0)$ não é ponto crítico de f
(e) nenhuma das demais alternativas

7. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax^2y$ onde a é um número real. Então $(0,0)$ é um ponto de sela de f se:

(a) nenhuma das demais alternativas
(b) $a \leq -1$
(c) $a \geq 1$
(d) $-1 < a \leq 0$
(e) $0 < a < 1$

8. Considere os seguintes limites:

$$\text{(I)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, \quad \text{(II)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \operatorname{sen} x}{x^2+|y|}, \quad \text{(III)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy \operatorname{sen} x}{x^2+|y|}.$$

Então:

(a) I não existe; II existe; III existe
(b) I não existe; II não existe; III existe
(c) I não existe; II existe; III não existe
(d) I existe; II não existe; III existe
(e) I existe; II existe; III não existe

9. A equação quadrática

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$$

representa em $\mathbb{R}^3$:

(a) Dois planos
(b) Uma esfera
(c) Um parabolóide
(d) Um cone
(e) Um conjunto vazio

10. Sabendo que $y = Ax^2e^{2x}$ é solução da equação diferencial

$$y'' + by' + cy = 3e^{2x}$$

para alguma contante real $A \neq 0$, quanto valem b e c ?

(a) $b = -4$ e $c = 4$
(b) $b = -2$ e $c = 4$
(c) $b = 4$ e $c = 2$
(d) $b = -2$ e $c = 1$
(e) nenhuma das demais alternativas

11. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável no ponto $(0, 0)$. Sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0)$ é dado por

$$4x - 3y + 5z = 1.$$

Qual é a maior taxa de variação de f no ponto $(0, 0)$?

(a) 1
(b) 5
(c) 4/5
(d) 3/5
(e) 3

12. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2, \ln t)$, $t > 0$. Em qual instante de tempo t a reta tangente a $\mathcal{C}$ em $\mathbf{r}(t)$ é normal ao plano $2x + 2y + z = 0$?

(a) 1
(b) 2
(c) $\ln 2$
(d) e^2
(e) 0

13. Qual o número de pontos no hiperbolóide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao o plano $z = x + y$?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) infinitos
(e) 4