

1. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável no ponto $(0, 0)$. Sabe-se que as derivadas direcionais de $f(x, y)$ no ponto $(0, 0)$ segundo as direções dos vetores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ são, respectivamente, 1 e -2. Quanto valem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, respectivamente?

- (a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (b) $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$
- (c) 1 e -3
- (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\sqrt{2}$
- (e) 2 e -2

2. Considere a superfície \mathcal{S} de equação $ax^2 + bxy - cz = 2$, onde a, b, c são números reais. Se o plano de equação $2x + y - 3z = 0$ é tangente a \mathcal{S} no ponto $(1, 1, 1)$, então o produto abc vale:

- (a) -32/9
- (b) 2/9
- (c) -2/3
- (d) 1/3
- (e) 3

3. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Considere as afirmativas:

- (I) f é contínua em \mathbb{R}^2
- (II) f é contínua em apenas $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$
- (III) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$
- (IV) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Marque a alternativa correta:

- (a) Apenas a afirmativa II é falsa
- (b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras
- (c) Apenas as afirmativas II, III são verdadeiras
- (d) Apenas a afirmativa IV é verdadeira
- (e) Todas as afirmativas são falsas

4. Considere as figuras na **página anexa**. São mapas de contorno da superfície 1 e da superfície 2, respectivamente:

- (a) Mapa 1 e Mapa 2
- (b) Mapa 5 e Mapa 2
- (c) Mapa 1 e Mapa 4
- (d) Mapa 6 e Mapa 3
- (e) Mapa 5 e Mapa 4

5. Qual o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{x + y} \log(x - y)$?

- (a) $\{(x, y); x > y \geq -x\}$
- (b) $\{(x, y); y \geq x > -y\}$
- (c) $\{(x, y); x \geq 0, y < x\}$

- (d) $\{(x, y); x > 0, y \geq 0\}$
 (e) $\{(x, y); x \geq 0, y \leq 0, y < x\}$

6. Considere a função $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$. Podemos dizer que

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax^2)$ existe e varia com $a \in \mathbb{R}$
 (b) $\lim_{y \rightarrow 0} f(by, y)$ existe e varia com $b \in \mathbb{R}$
 (c) $\lim_{y \rightarrow 0} f(ay^2, y)$ não existe
 (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$
 (e) Nenhuma das outras afirmativas está correta

7. Quais são todos os pontos em que a direção de maior crescimento da função

$$f(x, y) = x^4 - 2y^2 \text{ é dada pelo vetor unitário } \mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)?$$

- (a) (x, y) tais que $y = -x^3$ e $x > 0$
 (b) $(x, y) = (1, -1)$
 (c) $(x, y) = \left(\frac{1}{2^{5/6}}, -\frac{1}{4} \right)$
 (d) $(x, y) = (1, 1)$
 (e) (x, y) tais que $y = x$

8. Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável em todo o plano \mathbb{R}^2 e tenha um único ponto crítico em (x_0, y_0) , com $x_0, y_0 > 0$. Então podemos garantir que a função $g(x, y) = f(x^2, y^2)$

- (a) possui pelo menos cinco pontos críticos
 (b) possui um único ponto crítico, em (x_0^2, y_0^2)
 (c) possui um único ponto crítico, em $(0, 0)$
 (d) possui exatamente dois pontos críticos, em $(0, 0)$ e (x_0^2, y_0^2)
 (e) possui exatamente dois pontos críticos, em $(0, 0)$ e $(\sqrt{x_0}, \sqrt{y_0})$

9. Qual a equação do plano tangente à superfície de nível de $\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + y^4 + z$ que passa pelo ponto $(2, 1, 3)$?

- (a) $8x + 12y + z = 31$
 (a) $2x + y + 3z = 16$
 (a) $3x + y + 2z = 32$
 (a) $2(x - 2) + (y - 1) + 3(z - 3) = 0$
 (a) $x + 4y + z = 9$

10. Sabendo que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1)$ é

$$x - 2y + 3z = 5,$$

e $g(u, v) = f(u + v, u - v)$, quanto valem $g_u(1, 0)$ e $g_v(1, 0)$, respectivamente?

- (a) $\frac{1}{3}$ e -1
 (b) -1 e 3
 (c) $-\frac{1}{3}$ e 1
 (d) 1 e -3

(e) -1 e -3

11. Quais os valores máximo e mínimo, respectivamente, de

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - z$$

no domínio $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$?

- (a) 4 e $-\frac{1}{12}$
- (b) $\frac{7}{4}$ e $\frac{7}{8}$
- (c) o valor máximo é $\frac{7}{4}$ e o valor mínimo não existe
- (d) 5 e $-\frac{1}{12}$
- (e) $\frac{7}{4}$ e $\frac{7}{16}$

12. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$ e D o domínio dado por $x^4 + x^2y^2 + y^4 \leq 1$. Então:

- (a) Ambos os valores máximo e mínimo de $f(x, y)$ em D ocorrem na fronteira de D .
- (b) O valor máximo de $f(x, y)$ em D ocorre na fronteira de D e o valor mínimo de $f(x, y)$ em D ocorre no interior de D
- (c) O valor mínimo de $f(x, y)$ em D ocorre na fronteira de D e o valor máximo de $f(x, y)$ em D ocorre no interior de D
- (d) Ambos os valores máximo e mínimo de $f(x, y)$ em D ocorrem no interior de D
- (e) nenhuma das demais alternativas

13. seja $f(x, y) = ax^2 + bxy - cy^2$, onde a, b, c são números reais. Se $b^2 + 4ac < 0$ e $c > 0$ então:

- (a) $(0, 0)$ é um ponto de máximo local
- (b) $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local
- (c) $(0, 0)$ é um ponto de sela
- (d) $(0, 0)$ não é um ponto crítico
- (e) nenhuma das demais alternativas