Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo 2 Unificado - MAC 128
Data: 20/12/2016

Prova de Segunda Chamada

1. Um tanque contém inicialmente 6 L de água salgada com concentração de sal 0,1 Kg/L. Em cada instante t seguinte (t em minutos), entra no tanque água pura a uma taxa de 1 L/min, enquanto que a mistura homogênea sai do tanque a uma taxa de 2 L/min. Seja $y(t)$ (em Kg) a quantidade de sal no tanque no instante t. Se t_0 é o instante exato em que o tanque fica vazio, quanto vale $y(t_0/2)$?
   (a) 0,15 Kg
   (b) 0,30 Kg
   (c) 0,20 Kg
   (d) 0,05 Kg
   (e) 0,01 Kg

2. Considere a superfície $\mathcal{S}$ de equação
$$2^{x/z} + 2^{y/z} - 8 = 0.$$
A equação do plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto $(2, 2, 1)$ é:
   (a) $x + y - 4z = 0$
   (b) $x + y - z = 3$
   (c) $x + y + 4z = 8$
   (d) $2x + 2y - z = 7$
   (e) $x + y + z = 5$

3. A equação diferencial $y' = 1 + x + y + xy$ tem solução geral satisfazendo (onde C é uma constante):
   (a) $\ln|1 + y| = x + \frac{1}{2}x^2 + C$
   (b) $y = x + \frac{1}{2}x^2 + C$
   (c) $y = y \ln|1 + x| + C$
   (d) $y = \dfrac{e^{3x}}{1 + x}$
   (e) $y = e^{3x}$

4. Considere o problema de valor inicial
$$3xy' + y = 12x, \quad y(1) = 4.$$
O valor de $y(8)$ é:
   (a) $49/2$
   (b) 24
   (c) $47/2$
   (d) $15/2$
   (e) 8

5. Uma função g é dita par se $g(x, y) = g(-x, -y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e par, podemos afirmar que necessariamente:
   (a) $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$
   (b) $\nabla f(0, 0) \neq (0, 0)$
   (c) f é duas vezes diferenciável
   (d) f não é contínua
   (e) $\nabla f(x, y)$ é par

6. Considere a função $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ definida em todo $\mathbb{R}^2$. O ponto $(0, 0)$:
   (a) É um ponto mínimo relativo e absoluto
   (b) É um ponto máximo relativo e absoluto
   (c) É de ponto de sela
   (d) É apenas um ponto mínimo relativo
   (e) É apenas um ponto máximo relativo

7. Seja $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + x$. Sobre o ponto $(0, 0)$:
   (a) Não é ponto crítico
   (b) É um ponto de mínimo local
   (c) É um ponto de máximo absoluto
   (d) É um ponto de sela
   (e) É um ponto de máximo local mas não é ponto de máximo absoluto

8. Quantas soluções constantes tem a equação diferencial $y' + xy^2 = x$?
   (a) 2
   (b) 1
   (c) Nenhuma
   (d) Infinitas
   (e) Nenhuma das demais alternativas

9. Qual o valor mínimo da função $f(x, y, z) = 2xy + yz + xz$ sobre o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 16 \text{ e } x, y, z > 0\}$?
   (a) 24
   (b) 0
   (c) 12
   (d) $1/4$
   (e) 32

10. Seja $z(x, y) = xy^2$ e sejam $x(t, s)$ e $y(t, s)$ funções diferenciáveis no ponto $(0, 0)$ tais que $y(t, s) = x(t, s)/2$ e $x(0, 0) = 1$. Sabendo-se que $\dfrac{\partial z}{\partial t}(0, 0) = 3$, quanto vale $\dfrac{\partial x}{\partial t}(0, 0)$?
   (a) 4
   (b) 0
   (c) $1/2$
   (d) 1
   (e) 2

11. Considere o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3-\sqrt{9-x^2-y^2}}{x^2+y^2}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) O limite existe e vale 1/6
(b) O limite existe e vale 1/3
(c) O limite existe e vale 1
(d) O limite existe e vale -1/3
(e) O limite não existe

12. A equação quadrática

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-1=0$$

representa em $\mathbb{R}^3$:

(a) Dois planos
(b) Uma esfera
(c) Um parabolóide
(d) Um cone
(e) Um conjunto vazio

13. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{r}(t)=(2t,t^2,\ln t)$, $t>0$. Em qual instante de tempo t a reta tangente a $\mathcal{C}$ em $\mathbf{r}(t)$ é normal ao plano $2x+2y+z=0$?

(a) 1
(b) 2
(c) $\ln 2$
(d) e^2
(e) 0

14. Sabe-se que $y''+ay'+y=e^x$ tem uma solução particular da forma $y=Ax^2e^x$, para alguma constante real A. Então:

(a) $a=-2$
(b) $a=0$
(c) $a=1$
(d) $a=-1$
(e) Qualquer $a\in\mathbb{R}$