Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de de Matemática
Disciplina: Cálculo II Unificado - MAC128
Data: 03/11/2016

Primeira Prova (P1)

1. Um objeto se desloca segundo o vetor posição $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \geq 0$. Suponha que ele parte do ponto $(1, -1)$ em $t = 0$ e sua velocidade é $\mathbf{v}(t) = (x(t), -x(t))$, $t \geq 0$. Se $\mathbf{r}(1) = (a, b)$, então $a + b$ vale

   (a) 0
   (b) 1
   (c) e^2
   (d) e
   (e) -1

2. Qual o valor de $a > 0$ tal que o comprimeto da curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, t),\ t \in [0, 2\pi],$$

   seja 4π?

   (a) $\sqrt{3}$
   (b) 2
   (c) $\sqrt{2}$
   (d) π
   (e) 3

3. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t, \mathrm{e}^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se $P = (a, b)$ é o ponto de $\mathcal{C}$ tal que a reta tangente passa pela orígem, então ab vale:

   (a) e
   (b) 1
   (c) e^2
   (d) 0
   (e) -1

4. Uma função é limitada quando existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, qual o valor de $a > 0$ tal que a equação

$$y'' + 2y = \mathrm{sen}\,(ax)$$

   tenha soluções y não-limitadas?

   (a) $\sqrt{2}$
   (b) 2
   (c) $\pi/2$
   (d) π
   (e) 3

5. Considere a solução de

$$xy' + 2y = 3x, \quad y(1) = -7.$$

   Qual o valor de $x > 0$ tal que $y(x) = 0$?

   (a) 2
   (b) 8
   (c) 10/3
   (d) 3/10
   (e) $\sqrt{2}$

6. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 6t - \pi, 2\,\mathrm{sen}\,t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

   O plano normal a $\mathcal{C}$ no ponto $(\sqrt{3}, 0, 1)$ é:

   (a) $-x + 6y + \sqrt{3}z = 0$
   (b) $\sqrt{3}x + z = 4$
   (c) $x + 6y = \sqrt{3}$
   (d) $-y + \sqrt{3}z = \sqrt{3}$
   (e) $12x - y + \sqrt{3}z = 12\sqrt{3}$

7. Considere a curva $\mathcal{C}$ obtida pela interseção das superfícies de equações $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e $x + z = 2$. Uma parametrização de $\mathcal{C}$ é:

   (a) $\mathbf{r}(t) = (-2 + 3\cos t, 3\,\mathrm{sen} t, 4 - 3\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (b) $\mathbf{r}(t) = (2 + 3\cos t, 3\,\mathrm{sen} t, -3\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (c) $\mathbf{r}(t) = (-2 + \cos t, \mathrm{sen} t, 4 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (d) $\mathbf{r}(t) = (3\,\mathrm{sen} t, -2 + 3\cos t, 4 - 3\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (e) $\mathbf{r}(t) = (-2 + 3\cos t, 3\,\mathrm{sen} t, -3\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$

8. Sendo y uma função de x, marque a alternativa em que temos uma equação diferencial linear:

   (a) $x^2y'' + \frac{1}{x}y' = \mathrm{e}^x y + \cos x$
   (b) $x^2y'' + \frac{1}{x}y' = \mathrm{e}^x y^2 + \cos x$
   (c) $x^2y'' + \frac{1}{x}(y')^2 = \mathrm{e}^x y + \cos x$
   (d) $x^2y'' + \frac{1}{x}\ln|y'| = \mathrm{e}^x y + \cos x$
   (e) $\ln|x|y'' + \frac{1}{x^2}y' = \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}\,y + \cos x$

9. A reta que passa pelo ponto $(3, -1, 2)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + z + 10 = 0$ tem equação:

   (a) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = z - 2$
   (b) $3x - 2y + z + 10 = 0$
   (c) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$
   (d) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = z - 2$
   (e) $3x - y + 2z + 10 = 0$

10. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^{t-1}, t^2, \cos(1-t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

   A equação do plano normal a $\mathcal{C}$ em $\mathbf{r}(1)$ é:

   (a) $x + 2y - 3 = 0$
   (b) $x + y + z - 3 = 0$
   (c) $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$ e $z = 1$
   (d) Não existe visto que $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$
   (e) $x + 2y - 3 = 0$ e $z = 0$

Nome: ______________________________

11. A equação diferencial linear

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x} + x + \cos x$$

tem uma solução particular $y_p(x)$ da forma:

(a) $y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{-2x} + Cx + D + E\cos x + F\,\mathrm{sen}\,x$
(b) $y_p(x) = (Ax + B)e^{-2x} + Cx + D + E\cos x + F\,\mathrm{sen}\,x$
(c) $y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{-2x} + Cx + Ex\cos x + Fx\,\mathrm{sen}\,x$
(d) $y_p(x) = (Ax^2 + Bx)e^{-2x} + Cx + D + E\cos x + F\,\mathrm{sen}\,x$
(e) $y_p(x) = (Ax^2 + Bx)e^{-2x} + Cx^2 + Dx + E\cos x + F\,\mathrm{sen}\,x$

12. O conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}$ equidistantes dos planos $x = -1$ e $y = -1$ é composto por:

(a) Dois planos
(b) Um plano
(c) Um parabolóide
(d) Um hiperbolóide
(e) Um elipsóide

13. Dentre as equações diferenciais abaixo, qual tem solução geral

$$y(x) = e^{-x/2}(C_1\cos x + C_2\mathrm{sen}\,x)\ ?$$

(a) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$
(b) $y'' - y' + \frac{5}{4}y = 0$
(c) $y'' + y' - \frac{5}{4}y = 0$
(d) $y'' - y = 0$
(e) $y'' + 4y' = 0$

14. Considere um sistema mola-massa subamortecido cuja posição da massa no instante $t \geq 0$ satisfaz a equação diferencial

$$x''(t) + \beta x'(t) + 4x(t) = 0,$$

onde $\beta > 0$ é a constante de amortecimento. Suponha que $x(0) = 0$ e $x'(0) = 2$. Qual o valor de β tal que o primeiro instante $t > 0$ em que a massa passa pela posição inicial ($x = 0$) é $t = 3$?
(*Dica: Um sistema massa-mola é dito subamortecido se ele oscila, mas sua amplitude decresce no tempo*)

(a) $\beta = 2\sqrt{4 - \pi^2/9}$
(b) $\beta = 3\sqrt{25 - \pi^2/4}$
(c) $\beta = 2\sqrt{9 + \pi^2/4}$
(d) $\beta = 2\sqrt{4 + \pi^2/9}$
(e) $\beta = \sqrt{16 - \pi^2/9}$