Instituto de Matemática – UFRJ

Cálculo Diferencial e Integral 2 (MAC128)

2a prova unificada, 14/10/2026

Questão 1 (2,5 pontos):

As curvas C_1 e C_2, parametrizadas por r_1 e r_2 respectivamente, passam pelo ponto $P = (1, 1)$:

$$r_1(t) = (e^{t^2 - t/2}, \operatorname{sen}(t\pi)), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$r_2(s) = ((s-1)^2 + 1, s), \quad s \in \mathbb{R},$$

(a) Calcule o ângulo formado pelos vetores tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto P.

(b) Dê uma equação paramétrica para a reta tangente a C_1 no ponto $(e^{1/2}, -1)$.

Prova: Primeiro acharemos os valores t_0 e s_0 para os quais $r_1(t_0) = r_2(s_0) = (1, 1)$. De $e^{t_0^2 - \frac{t_0}{2}} = 1$ segue que $t_0^2 - \dfrac{t_0}{2} = 0$ e por tanto $t_0 = 0$ ou $t_0 = \dfrac{1}{2}$. Mas como $\operatorname{sen}(t_0\pi) = 1$, segue que $t_0 = \dfrac{1}{2}$. No caso de s_0, a segunda coordenada da $s_0 = 1$. Derivamos r_1 e r_2 para calcular os vetores tangentes:

$$r_1'(t) = \left(e^{t^2 - \frac{t}{2}} \left(2t - \frac{1}{2}\right), \pi \cos(\pi t)\right), \quad \text{e} \quad r_2'(s) = (2(s-1), 1)\,.$$

Logo, os vetores tangentes a C_1 e C_2 em P são $r_1'(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 0)$ e $r_2'(1) = (0, 1)$.

(a) Como $r_1'(1/2) \cdot r_2'(1) = 0$, temos que os vetores são perpendiculares e o ângulo entre eles é

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}.$$

(b) Para o ponto $(e^{1/2}, -1)$, temos $t_0^2 - \dfrac{t_0}{2} = \dfrac{1}{2}$, logo $t_0 = -\dfrac{1}{2}$ ou $t_0 = 1$, e como $\operatorname{sen}(t_0\pi) = -1$ segue que $t_0 = -\dfrac{1}{2}$. Logo $r_1'(-\frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2}e^{1/2}, 0)$, e uma equação paramétrica para a reta tangente é

$$\boxed{\begin{cases} x = e^{1/2} - \dfrac{3}{2}e^{1/2}t, \\ y = -1. \end{cases}}$$

Questão 2 (2,5 pontos):

Uma partícula parte da posição $r(0) = (2, 1, -\pi)$ com velocidade $v(0) = (0, 1, 1)$. Sabendo que sua aceleração no instante t é dada por $a(t) = (-\cos(t), -\operatorname{sen}(t), 0)$:

(a) Ache a posição $r(t)$ em função do tempo t;

(b) Ache o comprimento da trajetória desde a partida até atingir o plano $z = 5$.

Prova:

(a) Integrando a aceleração obtemos a velocidade $v(t) = (-\operatorname{sen} t + c, \cos t + c', c'')$, e usando que $v(0) = (0, 1, 1)$, concluímos que $v(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$. Integrando novamente obtemos a posição em função do tempo, $r(t) = (\cos t + c, \operatorname{sen} t + c', t + c'')$, e usando que $r(0) = (2, 1, -\pi)$, concluímos que

$$\boxed{r(t) = (\cos t + 1, \operatorname{sen} t + 1, t - \pi)}.$$

(b) A trajetória está parametrizada por $r(t) = (\cos t + 1, \operatorname{sen} t + 1, t - \pi)$ e ela atinge o plano $z = 5$ quando $t - \pi = 5$, ou seja no instante $t = \pi + 5$. Como $\|v(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, o comprimento da trajetória desde a partida até atingir o plano $z = 5$ é

$$L = \int_0^{\pi+5} \|v(t)\|\, dt = \int_0^{\pi+5} \sqrt{2}\, dt = \boxed{\sqrt{2}(\pi + 5)}.$$

Questão 3 (2,5 pontos):
Considere os pontos $A = (2, -1, 7)$ e $B = (-3, 2, 3)$ no espaço cartesiano.

(a) Ache o ponto C no eixo z tal que $d(A, C) = d(B, C)$.

(b) Ache um ponto D tal que forme um paralelogramo com A, B e C.

(c) Dê uma equação para o plano π contendo A, B, C e D.

Prova:

(a) Como C pertence ao eixo z, escrevemos $C = (0, 0, c)$. Calculemos c usando que $d(A, C) = d(B, C)$:

$$\begin{aligned} 4 + 1 + (7 - c)^2 &= 9 + 4 + (3 - c)^2 \\ c^2 - 14c + 54 &= c^2 + 6c + 22 \\ 32 &= 8c \end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{C = (0, 0, 4)}.$$

(b) Podemos supor que A e B são vértices opostos, e C e D também. Logo $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} = (-3, 2, -1)$, e como $A = (2, -1, 7)$, concluimos que

$$\boxed{D = (2 + (-3), -1 + 2, 7 + (-1)) = (-1, 1, 6)}.$$

(c) Temos $\overrightarrow{AB} = (-5, 3, -4)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -3)$. Como vetor normal ao plano podemos tomar o produto vetorial

$$n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-5, -7, 1)$$

. Esses são os coeficientes do plano, ou seja,

$$\pi : -5x - 7y + z = d$$

Usando o ponto A calculamos $d = -10 + 7 + 7 = 4$, e assim

$$\boxed{\pi : -5x - 7y + z = 4}.$$

Questão 4 (2,5 pontos):

Classifique a superfície quádrica $Q : x^2 - 4y^2 - z^2 - 2x + 8y = 4$, descreva os cortes de Q com os planos $\{x = x_0\}$, e parametrize o corte $Q \cap \{x = 4\}$.

Prova: Completamos quadrados para levar na forma canônica:

$$x^2 - 4y^2 - z^2 - 2x + 8y = 4$$
$$(x-1)^2 - 4(y-1)^2 - z^2 = 1.$$

Identificamos assim que Q é um hiperboloide de duas folhas com centro $(1, 1, 0)$ e eixo x. Para os cortes $x = x_0$,

$$4(y-1)^2 + z^2 = (x_0 - 1)^2 - 1$$

teremos uma elipse se $(x_0 - 1)^2 - 1 > 0$, um ponto se $(x_0 - 1)^2 - 1 = 0$, e vazio se $(x_0 - 1)^2 - 1 < 0$. Como a igualdade $(x_0 - 1)^2 - 1 = 0$ vale para $x_0 = 2$ e $x_0 = 0$, concluimos que

$$Q \cap \{x = x_0\} \text{ é } \begin{cases} \text{elipse} & x_0 < 0 \text{ ou } x_0 > 2 \\ \text{ponto} & x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 2 \\ \text{vazio} & 0 < x_0 < 2 \end{cases}.$$

Para $x = 4$ temos a elipse

$$4(y-1)^2 + z^2 = 8 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{z^2}{8} = 1$$

e uma parametrização do corte é

$$r(t) = (4, 1 + \sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\operatorname{sen} t) \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$