Instituto de Matemática – UFRJ

Cálculo Diferencial e Integral 2 (MAC128)

1a prova unificada, 2/9/2026

Questão 1 (2,5 pontos):

Resolva o seguinte problema de valor inicial, apresentando a solução na forma implícita:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x y}{y^2+1}, \qquad y(0) = 1.$$

Prova: Essa é uma equação separável. Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{y^2+1}{y}\,dy = e^x\,dx$$
$$\left(y + \frac{1}{y}\right)dy = e^x\,dx.$$

Integrando,

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = e^x + C.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 1$,

$$\frac{1}{2} = 1 + C,$$

logo

$$C = -\frac{1}{2}.$$

Concluímos que a solução do PVI, na forma implícita, é

$$\boxed{\frac{y^2}{2} + \ln|y| = e^x - \frac{1}{2}}.$$

Questão 2 (2,5 pontos):

Ache a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$(x^2+1)y' + 3xy = 6x.$$

Prova: Como temos uma EDO linear de primeira ordem, primeiro dividimos a equação por x^2+1 e obtemos

$$y' + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{x^2+1}.$$

O fator integrante é

$$I(x) = e^{\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx}$$

$$= e^{\frac{3}{2}\ln(x^2+1)}$$
$$= (x^2+1)^{3/2}.$$

Usando o fator integrante, temos

$$\left((x^2+1)^{3/2}y\right)' = 6x(x^2+1)^{1/2}.$$

Integrando em cada lado,

$$(x^2+1)^{3/2}y = \int 6x(x^2+1)^{1/2}\,dx + C.$$

Fazendo a substituição $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$, obtemos

$$\begin{aligned}(x^2+1)^{3/2}y &= 3\int u^{1/2}\,du + C\\ &= 2u^{3/2} + C\\ &= 2(x^2+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{y(x) = 2 + \frac{C}{(x^2+1)^{3/2}}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Questão 3 (2,5 pontos):

Em duas culturas de bactérias, a quantidade de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Inicialmente, a primeira cultura possui 1.000 bactérias e constante de proporcionalidade 0,2, enquanto a segunda possui 2.000 bactérias e constante de proporcionalidade 0,1.

a) Expresse uma EDO para a quantidade $P(t)$ de bactérias da primeira cultura e uma EDO para a quantidade $Q(t)$ da segunda.

b) Determine o instante t em que as duas culturas terão a mesma quantidade de bactérias.

Prova: **(a)** Como a quantidade de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente, temos

$$P'(t) = 0{,}2P(t), \qquad P(0) = 1000,$$

para a primeira cultura, e

$$Q'(t) = 0{,}1Q(t), \qquad Q(0) = 2000,$$

para a segunda cultura. As soluções das duas EDOs são

$$P(t) = 1000e^{0{,}2t} \qquad \text{e} \qquad Q(t) = 2000e^{0{,}1t}.$$

(b) Queremos determinar o instante em que as duas culturas tenham a mesma quantidade de bactérias:

$$P(t) = Q(t).$$

Logo,

$$1000e^{0,2t} = 2000e^{0,1t}$$
$$e^{0,1t} = 2.$$

Tomando logaritmos,

$$0,1t = \ln 2.$$

Portanto,

$$\boxed{t = 10 \ln 2}.$$

Questão 4 (2,5 pontos):
Encontre a solução geral da equação usando o método dos coeficientes indeterminados:

$$y'' - 5y' + 4y = 6e^t.$$

Prova: Primeiro resolvemos a equação homogênea associada:

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

A equação característica é $r^2 - 5r + 4 = 0$, e suas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = 4$. Assim,

$$y_h = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Como o termo não homogêneo $6e^t$ corresponde a uma solução da equação homogênea, estamos no caso de ressonância. Por isso, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p = Ate^t.$$

Temos $y_p' = A(t+1)e^t$ e $y_p'' = A(t+2)e^t$. Substituindo na equação,

$$A(t+2)e^t - 5A(t+1)e^t + 4Ate^t = 6e^t.$$

Simplificando,

$$-3Ae^t = 6e^t,$$

Segue que $A = -2$, $y_p = -2te^t$ é uma solução particular, e concluimos que a solução geral é

$$\boxed{y = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - 2te^t}.$$