

Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral II
3ª Prova. - 19/11/2025

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3y}{x^6 + 3y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \pi, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Determine se o limite existe ou não existe, justificando sua resposta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3y}{x^6 + 3y^2}.$$

(b) $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$? $f(x, y)$ é diferenciável em $(0, 0)$?

Resolução:

Item (a)

Solução 1 - duas trajetórias simples: $x = 0$ e $y = x^3$.

Trajetória $x = 0$. Para $x = 0$ e $y \neq 0$,

$$\frac{2x^3y}{x^6 + 3y^2} = \frac{2 \cdot 0 \cdot y}{0 + 3y^2} = 0.$$

Logo, ao aproximar $(0, 0)$ por pontos da forma $(0, y)$ obtemos valor 0.

Trajetória $y = x^3$. Substituindo $y = x^3$ (portanto $x \neq 0$ pequeno),

$$\frac{2x^3y}{x^6 + 3y^2} = \frac{2x^3 \cdot x^3}{x^6 + 3x^6} = \frac{2x^6}{4x^6} = \frac{1}{2}.$$

Assim, ao aproximar $(0, 0)$ por pontos da forma (x, x^3) obtemos valor $\frac{1}{2}$.

Como duas trajetórias/caminhos que tendem a $(0, 0)$ produzem limites diferentes (0 e $1/2$) quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, conclui-se que o limite não existe.

Solução 2 - uma família de trajetórias: $y = kx^3$.

Trajetórias $y = kx^3$ (com $k \in \mathbb{R}$). Se $y = kx^3$,

$$\frac{2x^3y}{x^6 + 3y^2} = \frac{2x^3(kx^3)}{x^6 + 3(kx^3)^2} = \frac{2kx^6}{x^6 + 3k^2x^6} = \frac{2k}{1 + 3k^2},$$

valor independente de x (quando $x \neq 0$). Variando k obtém-se uma família de limites possíveis. Por exemplo $k = 0$ dá 0 e $k = 1$ dá $1/2$. Logo não há limite único quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Com efeito,

Cálculo Diferencial e Integral II
3ª Prova. - 19/11/2025(continuação)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3y}{x^6 + 3y^2} \text{ não existe.}$$

(b) Continuidade e diferenciabilidade em $(0,0)$.

Continuidade. Para f ser contínua em $(0,0)$ seria necessário

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \pi.$$

Como o limite do trecho $(x,y) \neq (0,0)$ não existe (parte (a)), em particular não pode ser igual a π . Portanto f **não é contínua** em $(0,0)$.

Diferenciabilidade. Diferenciabilidade em um ponto implica continuidade nesse ponto. Como f não é contínua em $(0,0)$, ela não é diferenciável em $(0,0)$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy.$$

a) Calcule a equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 1)$ na direção do vetor unitário $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Resolução: **a)** A equação do plano tangente é dada por

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Primeiro, calculamos as derivadas parciais de $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 3x.$$

Agora, avaliamos as derivadas parciais no ponto $(1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2(1) + 3(1) = 5,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2(1) + 3(1) = 5.$$

Cálculo Diferencial e Integral II
3ª Prova. - 19/11/2025(continuação)

Calculamos $f(1, 1)$:

$$f(1, 1) = (1)^2 + (1)^2 + 3(1)(1) = 1 + 1 + 3 = 5.$$

A equação do plano tangente é então:

$$z - 5 = 5(x - 1) + 5(y - 1),$$

o que simplifica para:

$$z = 5x + 5y - 5.$$

Portanto, a equação do plano tangente é:

$$\boxed{z = 5x + 5y - 5.}$$

b) A derivada direcional de f no ponto $(1, 1)$ na direção de $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ é dada por

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{v},$$

onde $\nabla f(1, 1)$ é o gradiente de f no ponto $(1, 1)$. O gradiente é dado por:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

Já calculamos as derivadas parciais no ponto $(1, 1)$:

$$\nabla f(1, 1) = (5, 5).$$

Agora, calculamos o produto escalar $\nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{v}$:

$$\nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{v} = (5, 5) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{4}{5} = 3 + 4 = 7.$$

Portanto, a derivada direcional é:

$$\boxed{D_{\mathbf{v}}f(1, 1) = 7.}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Determine os valores máximos, mínimos locais e pontos de sela da função $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$.

Cálculo Diferencial e Integral II
3ª Prova. - 19/11/2025(continuação)

Resolução: Vamos calcular as derivadas parciais de

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$$

Assim teremos

$$f_x = 3x^2 - 12y, \quad f_y = -12x + 24y^2, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -12, \quad f_{yy} = 48y.$$

Agora vamos fazer $f_x = 0$ e $f_y = 0$, logo

$$f_x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12y = 0 \Rightarrow x^2 = 4y$$

$$f_y = 0 \Rightarrow -12x + 24y^2 = 0 \Rightarrow x = 2y^2.$$

Substituindo $x = 2y^2$ em $x^2 = 4y$ teremos

$$(2y^2)^2 = 4y \Rightarrow 4y^4 = 4y$$

$$4y(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } y = 1.$$

- Se $y = 0$, então $x = 0$.
- Se $y = 1$, então $x = 2$.

Assim temos que os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(2, 1)$. A seguir vamos usar as segundas derivadas para analisar os pontos críticos, lembre que

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2.$$

- Em $(0, 0)$ temos

$$D(0, 0) = (0)(0) - (-12)^2 = -144 < 0,$$

então $(0, 0)$ é ponto de sela.

- Em $(2, 1)$ temos

$$D(2, 1) = (12)(48) - (-12)^2 = 432 > 0, \quad f_{xx}(2, 1) = 12 > 0,$$

então $(2, 1)$ é um mínimo local.

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine a menor distância de um ponto sobre a hipérbole $xy = 1$ até a origem.
(Dica: Trabalhe com a função que calcula o quadrado da distância.)

Cálculo Diferencial e Integral II
3ª Prova. - 19/11/2025(continuação)

Resolução: Queremos encontrar os valores extremos da distância de um ponto (x, y) na hipérbole $xy = 1$ até a origem $(0, 0)$. Trabalharemos com o quadrado da distância pois o mínimo da distância é assumido no mesmo ponto que o mínimo do quadrado da distância:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

A restrição é dada pela equação da hipérbole:

$$g(x, y) = xy - 1 = 0$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, procuramos pontos onde:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Isto é:

$$(2x, 2y) = \lambda(y, x)$$

Obtemos o seguinte sistema de equações:

$$2x = \lambda y \tag{1}$$

$$2y = \lambda x \tag{2}$$

$$xy = 1 \tag{3}$$

Temos que $xy \neq 0$. Logo temos de (1) e (2)

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y|$$

Considerando a restrição $xy = 1$, temos dois casos:

Se $x = y$, substituindo em (3) temos que:

$$x \cdot x = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Portanto, os pontos são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Se $x = -y$, substituindo em (3) temos que:

$$x \cdot (-x) = 1 \Rightarrow -x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = -1$$

Esta equação não tem solução real.

Portanto, os únicos pontos críticos são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora calculamos o valor da função $f(x, y)$ nestes pontos:

$$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$f(-1, -1) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$$

A menor distância é:

$$d_{\min} = \sqrt{2}$$

que ocorre nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.