Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral II
$2^{\underline{a}}$ Prova. - 01/10/2025

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Determine a equação cartesiana do plano Π_0 passando pelo ponto $(1, 5, 1)$ e perpendicular aos planos

$$\Pi_1 : 2x + y - 2z = 2 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : x + 3z = 4.$$

(b) Dê a parametrização da reta que passa pelo ponto $(1, 5, 1)$ e é perpendicular ao plano Π_0 do item (a).

Resolução:

(a) Os vetores normais dos planos dados são

$$\vec{n}_1 = (2, 1, -2), \quad \vec{n}_2 = (1, 0, 3).$$

O vetor normal do plano Π_0 deve ser ortogonal a ambos, logo

$$\vec{n}_0 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (3, -8, -1),$$

pois,

$$\vec{n}_0 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{n}_0 = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{n}_0 = \mathbf{i}(1 \cdot 3 - (-2) \cdot 0) - \mathbf{j}(2 \cdot 3 - (-2) \cdot 1) + \mathbf{k}(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1).$$

$$\vec{n}_0 = \mathbf{i}(3) - \mathbf{j}(6 + 2) + \mathbf{k}(-1).$$

$$\vec{n}_0 = (3, -8, -1).$$

Assim, a equação do plano Π_0 que passa por $(1, 5, 1)$ é

$$3(x - 1) - 8(y - 5) - (z - 1) = 0 \quad \iff \quad 3x - 8y - z = -38.$$

(b) A reta normal a Π_0 em $(1, 5, 1)$ tem vetor diretor $\vec{n}_0 = (3, -8, -1)$. Logo, sua parametrização é

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 5 - 8t, \\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a curva parametrizada

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t,\ t\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Encontre o vetor tangente à curva e calcule sua norma.

(b) Determine os valores do parâmetro t para os quais a curva está situada fora da esfera unitária, isto é, fora da região $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(c) Determine o comprimento do arco da curva que está situado fora da esfera unitária.

Resolução:

(a) O vetor tangente é dado pela derivada:

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ 1\right).$$

A norma do vetor tangente é:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos t\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto:

$$\boxed{\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ 1\right)} \quad \text{e} \quad \boxed{\|\gamma'(t)\| = \frac{\sqrt{5}}{2}.}$$

(b) Para determinar os valores do parâmetro para os quais a curva está fora da esfera unitária, analisamos a condição:

$$x^2 + y^2 + z^2 > 1.$$

Substituindo as coordenadas:

$$\left(\frac{1}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2 + t^2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{4}(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + t^2 > 1.$$

Logo:

$$t^2 > \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad |t| > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

No intervalo $t \in [0, 2\pi]$, o trecho fora da esfera é:

$$t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\pi\right].$$

(c) O comprimento de arco é dado por:

$$L = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Como $\|\gamma'(t)\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ é constante, temos:

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Use cortes(interseção com planos) para esboçar e identificar a superfície quádrica $2x^2 = 2y^2 + 43z^2$.

Resolução: Nossa equação é dada por:

$$2x^2 = 2y^2 + 43z^2.$$

Podemos observar que,

- Os traços em $x = k$ são uma família de elipses com as seguintes equações

$$2y^2 + 43z^2 = 2k^2.$$

- Os traços em $y = k$ são dados pelas equações

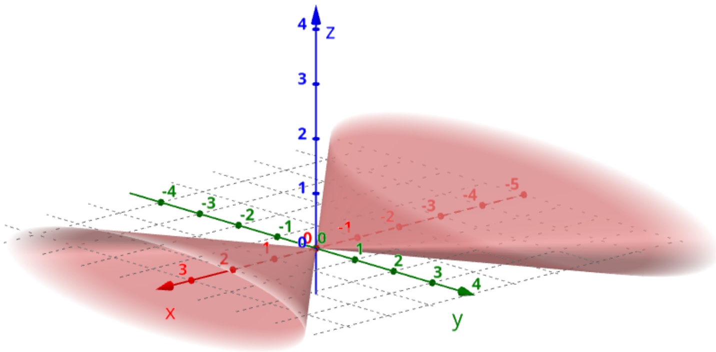
$$2x^2 - 43z^2 = 2k^2,$$

  que podem mudar de acordo com o valor de k.
  - Teremos hipérboles para $k \neq 0$.
  - Teremos duas retas se $k = 0$
- De forma análoga os traços em $z = k$ são dados pelas equações

$$2x^2 - 2y^2 = 43k^2,$$

  que podem mudar de acordo com o valor de k.
  - Teremos hipérboles para $k \neq 0$.
  - Teremos duas retas se $k = 0$

Teremos o grafo como um cone elíptico com eixo o x-eixo e vértice a origem.



Questão 4: (2.5 pontos)

Considere as superfícies dadas por

$$S_1 : \quad 20z = 4x^2 - 5y^2$$

$$S_2 : \quad 4x^2 + 5y^2 = 20.$$

Encontre uma parametrização para curva de interseção entre S_1 e S_2.

Resolução: Dividindo ambas as equações por 20, obtemos:

$$S_1 : \quad z = \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4}$$

$$S_2 : \quad \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Para parametrizar a curva de interseção, observe que, por estar em S_2, a projeção da curva no plano xy é uma elipse. Uma parametrização conveniente é

$$x = \sqrt{5}\cos t, \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\, t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Substituindo na equação de S_1 obtém-se z:

$$\frac{x^2}{5} = \cos^2 t, \qquad \frac{y^2}{4} = \mathrm{sen}^2\, t$$

logo

$$z = \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = \cos^2 t - \mathrm{sen}^2\, t.$$

Uma parametrização para a curva de interseção é, portanto,

$$r(t) = \left(\sqrt{5}\cos t,\ 2\,\mathrm{sen}\, t, \cos^2 t - \mathrm{sen}^2\, t\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

OBS: Também poderíamos dizer que $z = \cos^2 t - \mathrm{sen}^2\, t = \cos(2t)$ ou $z = \cos^2 t - \mathrm{sen}^2\, t = 2\cos^2 t - 1$.