Instituto de Matemática - IM/UFRJ

Cálculo Diferencial e Integral II

1ª Prova. - 27/08/2025

Questão 1: (2.5 pontos)

Encontre uma expressão para a solução geral da equação diferencial:

$$y\frac{dy}{dx} = x^3 e^{x^2 - y^2}.$$

Resolução: Separando as variáveis (*aqui usamos o abuso de notação do livro base*):

$$ye^{y^2} dy = x^3 e^{x^2} dx.$$

Integrando ambos os lados:

$$\int ye^{y^2} dy = \int x^3 e^{x^2} dx.$$

Para o lado esquerdo, usando a substituição $u = y^2$, $du = 2ydy$:

$$\int ye^{y^2} dy = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{y^2} + C_1.$$

Para o lado direito, usando $v = x^2$, $dv = 2xdx$ (logo $x^3dx = \frac{1}{2}vdv$):

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int ve^v dv.$$

Aplicando integração por partes em $\int ve^v dv$:

$$\int ve^v dv = (v-1)e^v,$$

portanto,

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C_2.$$

Assim, a solução implícita é:

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + \tilde{C},$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{e^{y^2} = (x^2-1)e^{x^2} + C.}$$

Questão 2: (2.5 pontos) (a)

Determine a solução geral $y(x)$ da equação diferencial

$$xy' + 2y = \sin(x^2)$$

sendo $x > 0$.

(b) Utilize o resultado do item (a) para obter a solução do problema de valor inicial $y(\sqrt{\pi}) = 0$.

Resolução: **(a)** A equação diferencial é

$$xy' + 2y = \sin(x^2), \quad x > 0. \qquad (\star)$$

Reescrevendo na forma reduzida a EDO linear de primeira ordem $(\star)$, temos:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin(x^2)}{x}. \qquad (\star\star)$$

O fator integrante é

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)} = x^2.$$

Multiplicando a equação $(\star\star)$ por $\mu(x) = x^2$, obtemos

$$\frac{d}{dx}\big(x^2 y(x)\big) = x\sin(x^2).$$

Integrando:

$$x^2 y = \int x\sin(x^2)\,dx + C.$$

Fazendo a substituição $u = x^2 \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx$:

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\int \sin(u)\,du = -\tfrac{1}{2}\cos(u).$$

Portanto,

$$x^2 y = -\tfrac{1}{2}\cos(x^2) + C,$$

e assim a solução geral é:

$$y(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{\cos(x^2)}{2x^2}, \quad x > 0.$$

(b) Usando a condição inicial $y(\sqrt{\pi}) = 0$:

$$0 = y(\sqrt{\pi}) = \frac{C}{\pi} - \frac{\cos(\pi)}{2\pi}.$$

Como $\cos(\pi) = -1$, temos

$$\frac{C}{\pi} = \frac{\cos(\pi)}{2\pi} = \frac{-1}{2\pi}.$$

Logo, $C = -\frac{1}{2}$.

A solução particular do PVI é

$$y(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{\cos(x^2)}{2x^2} = -\frac{1 + cos(x^2)}{2x^2}, \quad x > 0.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Numa colônia de bactérias, sabe-se que a população cresce a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presente num determinado instante de tempo. Se a massa de bactérias $p(t)$ no instante t cresce de 1 grama para 50 gramas em 12 horas, determine o valor de $p(t)$ após 18 horas.

Resolução: Como a quantidade $p(t)$ cresce em uma taxa proporcional a $p(t)$, a taxa de crescimento dp/dt pode ser dada por:

$$\frac{dp}{dt} = kp.$$

Esta é uma EDO separável que pode ser escrita como:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = k.$$

Integrando os dois lados:

$$\int \frac{1}{p}\,dp = \int k\,dt,$$

o que resulta em

$$\ln(p) = kt + c_1.$$

Aplicando o operador exponencial nos dois lados:

$$p(t) = e^{kt+c_1} = e^{kt}\cdot e^{c_1}.$$

Se definirmos

$$c = e^{c_1},$$

temos

$$p(t) = ce^{kt}.$$

Pode-se verificar que está solução está correta substituindo-se a função obtida na EDO e verificando se a igualdade é satisfeita. Para determinar a constante e integração c pode-se aplicar a condição inicial $p(0) = 1$:

$$p(0) = ce^0 = c \implies c = 1.$$

Logo, a solução é

$$p(t) = e^{kt}.$$

Para determinar a constante k pode-se utilizar a outra condição conhecida, $p(12) = 50$, temos

$$e^{12k} = 50 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(50)}{12}.$$

Assim, a solução final é

$$p(t) = e^{\frac{\ln(50)}{12}\,t}$$

Finalmente, a massa após 18 horas pode ser estimada:

$$\begin{aligned} p(18) &= e^{\frac{18}{12}\ln(50)} = e^{\frac{3}{2}\ln(50)} \\ &= e^{\ln(50^{\frac{3}{2}})} = 50^{\frac{3}{2}} = 50\sqrt{50} = 250\sqrt{2} \approx 352,5\,g, \end{aligned}$$

onde aproximamos $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Resolva a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 4x^2 - 6$$

Resolução: A EDO homogênea associada a esta equação é dada por $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y = 0$, cujos coeficientes são constantes. Assumimos uma solução da forma $y = e^{rx}$, obtendo a equação característica:

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

Logo

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0 \implies r = -2 \text{ (raiz dupla)}.$$

Para uma raiz dupla $r = -2$, a solução é:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{-2x}.$$

A solução particular depende de $g(x) = 4x^2 - 6$, assim encontraremos y_p através do método dos Coeficiente Indeterminados. Assumindo $y_p = Ax^2 + Bx + C$, obtemos

$$y_p' = 2Ax + B \text{ e } y_p'' = 2A.$$

Substituindo na EDO:

$$y_p'' + 4y_p' + 4y_p = 2A + 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 - 6$$

$$4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B + 4C = 4x^2 - 6$$

$$\begin{cases} 4A = 4 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 4C = -6 \end{cases}$$

$$A = 1,\ B = -2 \text{ e } C = 0$$

Logo, $y_p = x^2 - 2x$. Portanto, a solução geral é dada por:

$$y(x) = y_h + y_p = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + x^2 - 2x$$