Questão 1 (2.5 pontos):

Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y^2+x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução:

Reescrevendo a equação:

$$y\frac{dy}{dx} = xe^{x}e^{-y^2} \Rightarrow ye^{y^2}\,dy = xe^{x}\,dx$$

Integração do lado esquerdo:

Note que a derivada de y^2 é $2y$, portanto usamos a substituição $u = y^2$, $du = 2y\,dy$, ou seja:

$$\int ye^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{y^2}$$

Integração do lado direito:

Aplicamos integração por partes:

Seja $u = x$, $dv = e^{x}\,dx$
Então: $du = dx$, $v = e^{x}$

$$\int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x}$$

Juntando os dois lados:

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = xe^{x} - e^{x} + C$$

Usando a condição inicial $y(0) = 1$:

$$\frac{1}{2}e^{1} = 0 - e^{0} + C \Rightarrow \frac{1}{2}e = -1 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}e + 1$$

Substituindo C na equação:

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = xe^{x} - e^{x} + \left(\frac{1}{2}e + 1\right) \Rightarrow e^{y^2} = 2xe^{x} - 2e^{x} + e + 2$$

Isolando y:

$$y(x) = \sqrt{\log\left(2xe^{x} - 2e^{x} + e + 2\right)}$$

Questão 2 (2.5 pontos):

Seja $\mathcal{C}$ a curva dada pela interseção das superfícies $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, onde:

$$\mathcal{S}_1 : \quad x^2 + 3y^2 + z^2 = 1,$$
$$\mathcal{S}_2 : \quad x + y = 0.$$

(a) Obtenha uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [0, 2\pi)$.

(b) Determine os dois únicos pontos $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ e $Q = (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{C}$ para os quais a reta tangente a $\mathcal{C}$ nestes pontos é paralela ao vetor $(0, 0, 1)$.

Solução:

(a)

$$S_1 : x^2 + 3y^2 + z^2 = 1, \qquad S_2 : x + y = 0$$

A equação do plano S_2 nos permite escrever:

$$x = -y$$

Substituindo na equação do elipsoide S_1:

$$(-y)^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 3y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 + z^2 = 1$$

Essa é a equação de uma elipse no plano (y, z). Podemos escrevê-la como:

$$\left(\frac{y}{1/2}\right)^2 + \left(\frac{z}{1}\right)^2 = 1$$

Ou seja, é uma elipse com semi-eixo maior igual a 1 (no eixo z) e semi-eixo menor igual a $\frac{1}{2}$ (no eixo y).

A parametrização padrão para essa elipse é:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2}\cos t \\ z(t) = \sin t \end{cases} , \quad t \in [0, 2\pi)$$

Como $x = -y$, temos:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\cos t$$

Portanto, uma parametrização completa da curva C é:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ \sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi)}$$

(b) Queremos determinar os pontos da curva C, cuja reta tangente é paralela ao vetor $(0, 0, 1)$.

A curva está parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ \sin t\right)$$

Calculando o vetor tangente:

$$\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{1}{2}\sin t,\ -\frac{1}{2}\sin t,\ \cos t\right)$$

Queremos os valores de $t \in [0,\ 2\pi)$ para os quais esse vetor é paralelo a $(0, 0, 1)$, ou seja, proporcional a $(0, 0, 1)$. Isso ocorre quando:

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = 0,\ \pi$$

Substituímos esses valores na parametrização original:

$$\vec{r}(0) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right), \qquad \vec{r}(\pi) = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$$

Portanto, os dois únicos pontos em que a reta tangente à curva C é paralela ao vetor $(0, 0, 1)$ são:

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)}$$

Questão 3 (2.5 pontos):

Considere a função

$$f(x,y) = 2\ln(x^2+1) - x^2 - y^2.$$

(a) Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

(b) De uma equação para o plano tangente ao gráfico no ponto $(1, 1, f(1,1))$

(c) Ache os pontos críticos e classifique em ponto sela, máximo local ou mínimo local.

Solução:

(a) Derivadas parciais de primeira ordem:

$$f_x(x,y) = \frac{4x}{x^2+1} - 2x, \qquad f_y(x,y) = -2y$$

Derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{4(x^2+1) - 8x^2}{(x^2+1)^2} - 2 = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2} - 2$$

$$f_{yy}(x,y) = -2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$$

(b) Para obter o plano tangente no ponto $(1, 1, f(1,1))$, primeiro calculamos:

$$f(1,1) = 2\ln(1^2+1) - 1 - 1 = 2\ln(2) - 2$$

$$f_x(1,1) = \frac{4\cdot 1}{1^2+1} - 2\cdot 1 = \frac{4}{2} - 2 = 0$$

$$f_y(1,1) = -2\cdot 1 = -2$$

A equação do plano tangente é:

$$z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$$

$$z = 2\ln(2) - 2 - 2(y-1)$$

(c) Os pontos críticos ocorrem onde $\nabla f = 0$. Resolvendo:

$$f_x = \frac{4x}{x^2+1} - 2x = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2x(x^2+1)}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 4x - 2x^3 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow 2x(1-x^2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ \pm 1$$
$$f_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Os pontos críticos são: $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

Para classificar, usamos o discriminante:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Em $(0,0)$:

$$f_{xx}(0,0) = 4 - 2 = 2, \quad f_{yy} = -2 \Rightarrow D = 2 \cdot (-2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{ponto de sela}$$

Em $(1,0)$:

$$f_{xx}(1,0) = \frac{4-4}{(1+1)^2} - 2 = 0 - 2 = -2, \quad f_{yy} = -2 \Rightarrow D = (-2)(-2) = 4 > 0,\ f_{xx} < 0$$

$\Rightarrow$ máximo local

Em $(-1,0)$:

$$f_{xx}(-1,0) = \frac{4-4}{(1+1)^2} - 2 = 0 - 2 = -2, \quad f_{yy} = -2 \Rightarrow D = (-2)(-2) = 4 > 0,\ f_{xx} < 0$$

$\Rightarrow$ máximo local

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(0,0): ponto de sela}\\ \text{(1,0) e (-1,0): máximos locais}\end{array}}$$

Questão 4 (2.5 pontos):

(a) Mostre que o ponto da reta $x-y=10$ mais próximo do ponto $P=(x_0,y_0)$ é $P'=(x_0+\lambda, y_0-\lambda)$, onde $\lambda=\dfrac{1}{2}(10-x_0+y_0)$.

(b) Determine os pontos da elipse $x^2+4y^2=16$ que estão mais próximos e mais distantes da reta $x-y=10$.

Solução:

(a) Seja $P=(x_0,y_0)$. Queremos encontrar o ponto $P'=(x,y)$ sobre a reta $x-y=10$ que está mais próximo de P.

A reta tem vetor normal $\vec{n}=(1,-1)$, então um vetor ortogonal à reta é da forma $\lambda\vec{n}=(\lambda,-\lambda)$. Isso significa que o ponto mais próximo de P sobre a reta está na direção do vetor normal, ou seja:

$$P'=(x_0+\lambda,\ y_0-\lambda)$$

Como P' deve pertencer à reta $x-y=10$, substituímos:

$$(x_0+\lambda)-(y_0-\lambda)=10 \Rightarrow x_0-y_0+2\lambda=10 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}(10-x_0+y_0)$$

Portanto, o ponto da reta mais próximo de P é:

$$\boxed{P'=(x_0+\lambda,\ y_0-\lambda)\,, \quad \lambda=\frac{1}{2}(10-x_0+y_0)}$$

(b) Queremos determinar os pontos da elipse $x^2+4y^2=16$ mais próximos e mais distantes da reta $x-y=10$.

Seja $P=(x,y)$ um ponto da elipse. O ponto da reta mais próximo de P, conforme o item (a), é:

$$P'=(x+\lambda,\ y-\lambda)\,, \quad \lambda=\frac{1}{2}(10-x+y)$$

O vetor entre P e P' é $\vec{v}=(\lambda,\ -\lambda)$, cujo módulo (distância entre os pontos) é:

$$d=\sqrt{\lambda^2+(-\lambda)^2}=\sqrt{2\lambda^2}=\sqrt{2\left(\frac{1}{2}(10-x+y)\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|10-x+y\right|.$$

Assim, estamos procurarando os extremos da função $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|10-x+y\right|$ sujeita a restrição $g(x,y)=x^2+4y^2=16$.

Solução 1

Vamos verificar primeiramente que a reta e a elipse não tem ponto em comum. Neste caso, temos $x = y + 10$. Substituindo na restrição:

$$(y+10)^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow 5y^2 + 20y + 100 = 16 \Rightarrow 5y^2 + 20y + 84 = 0$$

O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 5 \cdot 84 = 400 - 1680 = -1280 < 0$$

Portanto, não há soluções reais. Concluímos que não existe ponto da elipse para o qual $10 - x + y = 0$.

Logo, achar extremos da função $\dfrac{1}{\sqrt{2}}|10 - x + y|$ sujeita a restrição $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 16$ é equivalente a achar extremos da função $10 - x + y$ sujeita a restrição $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 16$. Aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Calculamos os gradientes:

$$\nabla f = (-1,\ 1), \qquad \nabla g = (2x,\ 8y)$$

Pelo método de Lagrange:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow (-1,\ 1) = \lambda(2x,\ 8y)$$

Note que $x \neq 0$, $y \neq 0$. Logo, Sistema:

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda x \\ \ \ 1 = 8\lambda y \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2x} = \frac{1}{8y} \Rightarrow -4y = x$$

Substituímos na restrição:

$$x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow (-4y)^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow 16y^2 + 4y^2 = 20y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{5}$$

Logo:

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x = \mp\frac{8}{\sqrt{5}}$$

Substituímos na função f:

– Para $x = -\dfrac{8}{\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$:

$$f = 10 + \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

– Para $x = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$, $y = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$:

$$f = 10 - \frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Portanto:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Máximo:} & \left(-\dfrac{8}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \text{Mínimo:} & \left(\dfrac{8}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{array}}$$

Solução 2

Para evitar ter que trabalhar com valor absoluto, considere $f(x,y) = (10 - x + y)^2$, com restrição $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 16$.

Aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f = (-2(10 - x + y), 2(10 - x + y)), \quad \nabla g = (2x, 8y)$$

Igualando:

$$(-2(10 - x + y), 2(10 - x + y)) = \lambda(2x, 8y)$$

Sistema:

$$-2(10 - x + y) = 2\lambda x, \quad 2(10 - x + y) = 8\lambda y$$

Antes de dividir as equações para eliminar o fator comum $(10 - x + y)$, devemos garantir que os denominadores envolvidos (isto é, x e y) não são zero. Analisemos os casos:

- **Caso $x = 0$:** da primeira equação do sistema de Lagrange,

  $$-2(10 - x + y) = 0 \Rightarrow 10 - x + y = 0 \Rightarrow y = -10$$

  Substituindo em $x^2 + 4y^2 = 16$:

  $$0^2 + 4(-10)^2 = 400 \neq 16$$

  Portanto, $x = 0$ não satisfaz a restrição.
- **Caso $y = 0$:** da segunda equação do sistema,

  $$2(10 - x + y) = 0 \Rightarrow x = 10$$

  Substituindo na equação da elipse:

  $$10^2 + 0 = 100 \neq 16$$

  Assim, $y = 0$ também não satisfaz a restrição.
- **Caso $10 - x + y = 0$:** isso anula o gradiente de f, ou seja, $\nabla f = \vec{0}$. Isso significaria que f atinge um valor extremo com gradiente nulo.
  Neste caso, temos $x = y + 10$. Substituindo na restrição:

  $$(y + 10)^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow 5y^2 + 20y + 100 = 16 \Rightarrow 5y^2 + 20y + 84 = 0$$

  O discriminante dessa equação é:

  $$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 5 \cdot 84 = 400 - 1680 = -1280 < 0$$

  Portanto, não há soluções reais. Concluímos que não existe ponto da elipse para o qual $10 - x + y = 0$.

Como nenhum dos casos problemáticos ocorre na elipse, podemos realizar a divisão com segurança.

$$-\frac{10-x+y}{x} = \frac{10-x+y}{4y} \Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{1}{4y} \Rightarrow -4y = x$$

Substituímos na restrição:

$$x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow 16y^2 + 4y^2 = 20y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x = \mp\frac{8}{\sqrt{5}}$$

Os pontos extremos são:

$$\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Calculando $10 - x + y$:

No ponto $\left(-\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$: $\quad 10-x+y = 10+\frac{8}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}} = 10+\sqrt{20} \quad \Rightarrow$ máxima distância

No ponto $\left(\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$: $\quad 10-x+y = 10-\frac{8}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}} = 10-\sqrt{20} \quad \Rightarrow$ mínima distância

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Mais próximo da reta:} & \left(\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \text{Mais distante da reta:} & \left(-\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{array}}$$