Questão 1 (2.5 pontos):

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^3+y)^{\frac{1}{3}}$.

(a) Calcule a derivada parcial $f_x(x,y)$ e verifique que ela admite a seguinte expressão:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^3+y)^{\frac{2}{3}}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) A função derivada parcial $f_x(x,y)$ é contínua na origem? Justifique sua resposta.

Solução:

(a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, aplicamos a regra da cadeia:

$$f_x(x,y) = \frac{d}{dx}\left((x^3+y)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{(x^3+y)^{\frac{2}{3}}}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$, utilizamos a definição de derivada parcial:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}.$$

Como $f(h,0) = (h^3)^{\frac{1}{3}} = h$ e $f(0,0) = 0$, temos:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Portanto,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^3+y)^{\frac{2}{3}}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(b) Para determinar se $f_x(x,y)$ é contínua devemos verificar se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 1$.

Vamos analisar o limite através de diferentes caminhos:

- Ao longo do eixo x $(y = 0)$, temos:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f_x(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{(x^3)^{2/3}} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

- Ao longo do eixo y $(x = 0)$, temos:

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f_x(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^{2/3}} = 0.$$

Como o limite depende do caminho, ele não existe.

Resposta (b): $\boxed{f_x(x,y) \text{ não é contínua na origem}}$.

OBS: Também é possível concluir que o limite não existe por outros caminhos, como por exemplo, pelo gráfico das funções $y = ax^3$.

Questão 2 (2.5 pontos):
Seja $f(x,y) = x^3y^4 - x^4y^3$.

(a) Determine a derivada direcional de f no ponto $(1,-1)$ na direção do vetor unitário $\mathbf{u}$ indicada pelo ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual o valor da máxima taxa de variação?

Solução:

(a) A derivada direcional de f no ponto (x_0,y_0), na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$, é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \mathbf{u}$$

O gradiente de f é $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = 3x^2y^4 - 4x^3y^3, 4x^3y^3 - 3x^4y^2)$. Avaliando no ponto $(1,-1)$, temos

$$\nabla f(1,-1) = (7,-7).$$

A direção dada por $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ é:

$$\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculando o produto escalar:

$$\frac{\partial f}{\partial u}f(1,-1) = (7,-7)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (-7)\cdot\frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2} = \frac{7(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

Resposta (a): $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial u}f(1,-1) = \dfrac{7(\sqrt{3}-1)}{2}}$.

(b) A máxima taxa de variação ocorre na direção do vetor gradiente:

$$\nabla f(1,-1) = (7,-7).$$

A direção unitária correspondente é:

$$\mathbf{u}_{\text{máx}} = \frac{1}{\|\nabla f\|}(7,-7) = \frac{1}{\sqrt{49+49}}(7,-7) = \frac{1}{\sqrt{98}}(7,-7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1).$$

A máxima taxa de variação é o módulo do gradiente:

$$\|\nabla f(1,-1)\| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

Resposta (b): $\boxed{\text{máxima taxa de variação na direção de } \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \text{ e igual a } 7\sqrt{2}}$

Questão 3 (2.5 pontos):
Seja a função $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$, definida e diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(a) Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função $z = f(x,y)$ no ponto $P = (1,2,f(1,2))$.

(b) Ache os pontos críticos e explique se são máximos locais, mínimos locais, ou pontos sela.

Solução:

(a) A fórmula do plano tangente ao gráfico de $z = f(x,y)$ no ponto (x_0,y_0) é:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Dado $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$, as suas derivadas parciais são:

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

Para concluir precisamos então avaliar f, f_x, e f_y no ponto $(x_0,y_0) = (1,2)$:

$$f(1,2) = \ln(1^2+2^2+1) = \ln(6) \qquad f_x(1,2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad f_y(1,2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Resposta (a): $\boxed{z = \ln(6) + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2)}$

(b) Os pontos críticos (x_0,y_0) são os zeros do gradiente.

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$

O único ponto crítico é $(0,0)$. Como as derivadas parciais de segundo ordem

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2+1)-4x^2}{(x^2+y^2+1)^2} \quad f_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2+1)-4y^2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

são continuas, podemos usar o teste da segunda derivada. Temos $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ e $D(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 4 > 0$. Logo $(0,0)$ é um mínimo local.

Resposta (b): $\boxed{\text{O único ponto crítico de } f \text{ é } (0,0) \text{ e é mínimo local.}}$

OBS: Para classificar o ponto crítico, podemos também argumentar que o logaritmo é crescente, e que x^2+y^2+1 atinge o mínimo absoluto em $(0,0)$, pelo que $(0,0)$ é um mínimo local e absoluto de f.

Questão 4 (2.5 pontos):

Determine o máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - y^2$ restrita à elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, e os pontos onde eles se atingem.

Solução:

Como f é contínua e a região compacta, o Teorema do Valor Extremo (ou Teorema de Weierstrass) garante a existência de máximos e mínimos absolutos.

Usamos o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g, \\ g(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Calculamos os gradientes:

$$\nabla f = (x - \frac{3}{2}, -2y), \quad \nabla g = (\frac{1}{2}x, 2y)$$

Como ∇g só se anula na origem, $\nabla g \neq 0$ sobre a elipse, e podemos aplicar o método. Temos que resolver o sistema,

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2} = \lambda \cdot \frac{1}{2}x \\ -2y = \lambda \cdot 2y \\ g(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

No caso $y = 0$, substituindo na terceira equação, obtemos $x = \pm 2$.

No caso $y \neq 0$, simplificando na segunda equação, obtemos $\lambda = -1$. Substituindo na primeira obtemos $x = 1$. E substituindo na terceira, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Concluimos que há quatro pontos candidatos: $(2,0)$, $(-2,0)$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, e $(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Nestes pontos:

$$f(2,0) = -1 \quad f(-2,0) = 5 \quad f(1, \frac{\sqrt{3}}{2}) = f(1, \frac{-\sqrt{3}}{2}) = -\frac{7}{4}$$

e assim podemos identificar máximos e mínimos absolutos.

Respostas:

O valor **mínimo** é $-\frac{7}{4}$ e se atinge nos pontos $(1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

O valor **máximo** é 5 e se atinge no ponto $(-2,0)$.

OBS: Substituindo $y^2 = 1-(x^2/4)$ na expressão para $f(x,y)$, a questão se torna achar os extremos absolutos de $h(x) = 3(x^2/4) - 3(x/2) - 1$ sujeito a $-2 \leq x \leq 2$. Como $h'(x) = 0 \iff x = 1$, segue que os candidatos a extremos são 1, -2 e 2. Verifica-se imediatamente que $h(1) = -7/4$, $h(2) = -1$, $h(-2) = 5$. Se $x = -2$ então $y = 0$ e se $x = 1$ $y = \pm(\sqrt{3})/2$.