



Questão 1 (2.5 pontos):

Considere a equação diferencial $y'' + y' - 6y = 2e^{-2t}$.

- (a) Ache a solução geral da equação diferencial.
(b) Se $y(0) = 1$, então encontre $y'(0)$ de modo a garantir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Solução:

(a) **Solução da equação homogênea associada**

$$y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r + 3)(r - 2) = 0 \Rightarrow r_1 = -3, \quad r_2 = 2$$

$$y_h(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

Solução particular:

Encontraremos uma solução particular através do método dos Coeficientes Indeterminados. Como o termo não homogêneo é $2e^{-2t}$, propomos:

$$y_p(t) = Ae^{-2t}$$

$$y_p'(t) = -2Ae^{-2t}, \quad y_p''(t) = 4Ae^{-2t}$$

Substituindo na equação:

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = 2e^{-2t} \Rightarrow 4Ae^{-2t} - 2Ae^{-2t} - 6Ae^{-2t} = 2e^{-2t} \Rightarrow -4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$$

Solução geral:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

- (b) **Condição:** $y(0) = 1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

Para que $y(t) \rightarrow 0$, o termo $C_2 e^{2t}$ deve ser eliminado:

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

Assim, a solução fica:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Aplicando a condição $y(0) = 1$:

$$C_1 - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Derivando:

$$y'(t) = -\frac{9}{2}e^{-3t} + e^{-2t} \Rightarrow y'(0) = -\frac{9}{2} + 1 = -\frac{7}{2}$$



Questão 2 (2.5 pontos):

Considere a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (-\sin t + t \cos t, \cos t + t \sin t, at^2), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sabendo que o comprimento total desta curva é $6\pi^2$, ache o valor de a .

Solução:

Comprimento de arco de curva

A fórmula do comprimento de uma curva parametrizada por $\gamma(t)$ é:

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Calculamos a derivada de cada componente:

- $x(t) = -\sin t + t \cos t \Rightarrow x'(t) = -\cos t - t \sin t + \cos t = -t \sin t$
- $y(t) = \cos t + t \sin t \Rightarrow y'(t) = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$
- $z(t) = at^2 \Rightarrow z'(t) = 2at$

O vetor velocidade é:

$$\gamma'(t) = (-t \sin t, t \cos t, 2at).$$

O módulo do vetor velocidade é:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-t \sin t)^2 + (t \cos t)^2 + (2at)^2} = \sqrt{t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4a^2 t^2} = t\sqrt{1 + 4a^2}.$$

Comprimento da curva:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{1 + 4a^2} dt = \sqrt{1 + 4a^2} \int_0^{2\pi} t dt = \sqrt{1 + 4a^2} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{1 + 4a^2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{2} \\ L &= \sqrt{1 + 4a^2} \cdot 2\pi^2 \end{aligned}$$

Igualando ao comprimento dado:

$$\sqrt{1 + 4a^2} \cdot 2\pi^2 = 6\pi^2 \Rightarrow \sqrt{1 + 4a^2} = 3 \Rightarrow 1 + 4a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$



Questão 3 (2.5 pontos):

Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (2, 2, 2)$ no espaço euclidiano.

- (a) Dê uma equação paramétrica da reta r que passa por A e B .
- (b) Calcule a área do triângulo ABC .
- (c) Dê uma equação cartesiana para o plano π que passa por A , B e C .

Solução:

- (a) O vetor diretor da reta r é $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (0, 2, 2)$. Utilizando o ponto $A = (1, 0, 1)$ como posição inicial, podemos parametrizar a reta r como segue:

$$x = 1 \quad y = 2t \quad z = 1 + 2t \quad t \in \mathbb{R},$$

e utilizando o ponto $B = (1, 2, 3)$ como ponto inicial, podemos parametrizar a reta r por:

$$x = 1 \quad y = 2 + 2t \quad z = 3 + 2t \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Para calcular a área usaremos o produto vetorial entre os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (1, 2, 1)$:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-2, 2, -2)$$

A norma desse vetor é $\sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$, e calcula a área do paralelogramo determinado. Concluimos que a área do triângulo ABC é a metade, ou seja $\sqrt{3}$.

Outra forma de calcular a área do triângulo ABC seria utilizando a projeção do vetor $\vec{AC}$ sobre a direção perpendicular a $\vec{AB}$, determinando assim a altura relativa à base $\vec{AB}$. A área seria então dada por $\frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}_\perp\|$, onde $\vec{AC}_\perp$ é o componente de $\vec{AC}$ ortogonal a $\vec{AB}$.

- (c) O vetor $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, 2, -2)$ é normal ao plano π . Logo, o plano tem equação do tipo

$$-2x + 2y - 2z = d$$

Para achar d avaliamos por exemplo em A :

$$d = -2(1) + 2(0) - 2(1) = -4$$

Concluimos que a equação do plano π é $-2x + 2y - 2z = -4$, ou equivalentemente, $x - y + z = 2$.



Questão 4 (2.5 pontos):

Considere a superfície $\mathcal{S}$ de equação dada por

$$-2x^2 + y^2 - z^2 - 2z - 2 = 0.$$

- (a) Identifique a superfície, isto é, dê o seu nome.
- (b) Parametrize a curva $\mathcal{C}$ que é a interseção entre $\mathcal{S}$ e o plano $y = \sqrt{2}$.
- (c) Dê uma equação paramétrica da reta tangente a curva $\mathcal{C}$ no ponto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -1\right)$.

Solução:

- (a) Vamos completar quadrados em z :

$$\begin{aligned} -2x^2 + y^2 - (z^2 + 2z) - 2 &= 0 \Rightarrow -2x^2 + y^2 - [(z+1)^2 - 1] - 2 = 0 \\ \Rightarrow -2x^2 + y^2 - (z+1)^2 + 1 - 2 &= 0 \Rightarrow -2x^2 + y^2 - (z+1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Reescrevendo:

$$\frac{y^2}{1} - \frac{(z+1)^2}{1} - \frac{x^2}{1/2} = 1$$

Esta é a equação de um **hiperbolóide de duas folhas**, com o eixo principal na direção do eixo y e centro em $(0, 0 - 1)$.

- (b) Substituímos $y = \sqrt{2}$ na equação da superfície:

$$\begin{aligned} -2x^2 + (\sqrt{2})^2 - (z+1)^2 &= 1 \Rightarrow -2x^2 + 2 - (z+1)^2 = 1 \Rightarrow -2x^2 - (z+1)^2 = -1 \\ \Rightarrow 2x^2 + (z+1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Essa é a equação de uma elipse no plano xz , centrada em $(0, \sqrt{2}, -1)$. Podemos parametrizar:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \quad z(t) = -1 + \sin t, \quad y(t) = \sqrt{2}$$

Assim, a parametrização da curva é:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sqrt{2}, -1 + \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi)$$

- (c) **Dê uma equação paramétrica da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -1\right)$.**

Comparando com a parametrização:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos t = -1 \Rightarrow t = \pi$$



$$z(t) = -1 + \sin t = -1 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = \pi$$

Derivando:

$$\vec{r}'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, 0, \cos t \right) \Rightarrow \vec{r}'(\pi) = (0, 0, -1)$$

Como a curva passa por $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -1\right)$ com vetor tangente $(0, 0, -1)$, a equação da reta tangente é:

$$\vec{r}_{\text{tang}}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -1 - s \right), \quad s \in \mathbb{R}$$