

Gabarito - Prova P1
MAC128 – Cálculo Diferencial e Integral 2
IM/UFRJ – 2025.1

16 de abril de 2025

Questão 1 (2.5 pontos)

Determine a solução geral da equação diferencial:

$$(y - yx)y' = (y + 1)^2, \quad \text{onde } y' = \frac{dy}{dx}.$$

Solução: Fazendo a separação de variáveis e usando $y' = \frac{dy}{dx}$, segue

$$\begin{aligned} y(1 - x) \frac{dy}{dx} &= (y + 1)^2, \\ \frac{y}{(y + 1)^2} y' &= \frac{1}{1 - x} \quad \text{se } x \neq 1 \text{ e } y \neq -1. \end{aligned}$$

Logo a primitiva, é

$$\int \frac{y}{(y + 1)^2} y' dx = - \int \frac{1}{x - 1} dx + C$$

Assim, obtemos

$$\int \frac{y}{(y + 1)^2} dy = - \int \frac{1}{x - 1} dx + C \tag{1}$$

Note,

$$\frac{y}{(y + 1)^2} = \frac{y + 1 - 1}{(y + 1)^2} = \frac{y + 1}{(y + 1)^2} - \frac{1}{(y + 1)^2} = \frac{1}{y + 1} - (y + 1)^{-2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{y}{(y + 1)^2} dy &= \int \left(\frac{1}{y + 1} - \frac{1}{(y + 1)^2} \right) dy = \int \frac{1}{y + 1} dy - \int (y + 1)^{-2} dy \\ &= \ln |y + 1| + \frac{1}{y + 1}. \end{aligned}$$

Para a integral do lado direito em (1),

$$\bullet \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(|x-1|)$$

Logo a solução geral na forma implícita da EDO (1) é:

$$\ln|y(x)+1| + \frac{1}{y(x)+1} = -\ln(|1-x|) + C,$$

C é uma constante real qualquer. Ou, tomando exponencial em ambos os lados na igualdade acima,

$$|y(x)+1|e^{\frac{1}{y(x)+1}} = e^{-\ln(|1-x|)+C} = e^C e^{-\ln(|1-x|)} = e^C e^{\ln(|1-x|^{-1})} = C'(|1-x|^{-1}) = C' \frac{1}{|1-x|},$$
$$\therefore |y(x)+1|e^{\frac{1}{y(x)+1}} = C' \frac{1}{|1-x|},$$

onde $C' = e^C$, é uma constante real não nula.

Outro caminho para resolver a integral do lado esquerdo de (1). Seja $u = y+1$, logo $du = dy$ e $u-1 = y$. Daí,

$$\bullet \int \frac{y}{(y+1)^2} dy = \int \frac{u-1}{u^2} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \ln(|u|) + \frac{1}{u} = \ln(|y+1|) + \frac{1}{y+1}.$$

Além disso, usando frações parciais, temos

$$\frac{y}{(y+1)^2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{(y+1)^2}.$$

Equivalentemente,

$$y = Ay + (A+B) \quad \Leftrightarrow \quad A=1 \text{ e } B=-1.$$

Questão 2 (2.5 pontos)

Resolva:

$$\begin{cases} xy' - 3y = x^4 e^x, & x > 0 \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

Solução:

Como $x > 0$, dividindo por x :

$$y' - \frac{3}{x}y = x^3 e^x. \quad (2)$$

Fator integrante:

$$I(x) = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3\ln(x)} = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3}.$$

Multiplicando a equação (2) por x^{-3} , obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x^3} \right) = e^x \Rightarrow \int \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x^3} \right) dx = \int e^x dx \Rightarrow \frac{y}{x^3} = e^x + C$$

Então, a solução de (2), é

$$y(x) = x^3 e^x + Cx^3. \quad (3)$$

Usando $y(1) = 2e$ em (3), obtemos

$$2e = y(1) = e + C \Rightarrow C = e \Rightarrow y(x) = x^3 e^x + ex^3 = x^3(e^x + e).$$

Questão 3 (2.5 pontos)

Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente a cada instante de tempo. Sabe-se que, inicialmente, há 200 de cultura e que, após 16 minutos, cresceu 12%.

- (a) Deduza a equação diferencial satisfeita pela população de bactérias e escreva o problema de valor inicial correspondente. Explique seu raciocínio.
- (b) Quanto tempo levará para triplicar a cultura?

Solução, item (a): Considere $Q(t)$ =quantidade da cultura de bactérias presentes, e t =tempo (em minutos (min)), a variável independente. Pela hipótese do problema (lei do crescimento), temos:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(t),$$

em que k é a constante de proporcionalidade. Note, $k > 0$, pois a cultura de bactérias cresce (logo $\frac{dQ}{dt} > 0$), e $Q(t) \geq 0$ (pelo processo).

Condições iniciais: Quando $t = 0$, temos $Q(0) = 200$, onde 200=(nº de bactérias inicial). Após, 16 min, o número de bactérias inicial cresceu 12%, daí, $Q(16) = Q(0) + 12\%Q(0) = 200 + 12\%200 = 200 + \frac{12}{100}200 = 200 + 12.2 = 200 + 24 = 224$, ou seja, $Q(16) = 224$. Logo,

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = kQ(t), & k > 0, \\ Q(0) = 200, \\ Q(16) = 224. \end{cases}$$

Solução, item (b): Do item (a), fazendo a separação de variáveis e integrando, segue

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{Q(t)} = k dt &\Rightarrow \ln(|Q(t)|) = \ln(Q(t)) = kt + c \Rightarrow Q(t) = e^{kt+c} = e^c e^{kt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q(t) = \underbrace{e^c}_{=C} e^{kt} = C e^{kt}. \end{aligned}$$

Logo $Q(t) = Ce^{kt}$. Mas $Q(0) = 200$, daí $200 = Q(0) = C$, logo $Q(t) = 200e^{kt}$. Por outro lado, $Q(16) = 224$, daí

$$224 = Q(16) = 200e^{16k} \Rightarrow \frac{224}{200} = e^{16k} \Rightarrow \ln(1,12) = 16k \Rightarrow k = \frac{1}{16} \ln(1,12).$$

Portanto, $Q(t) = 200e^{kt}$, onde $k = \frac{1}{16} \ln(1,12)$.

Queremos determinar um tempo t_0 de modo que, $Q(t_0) = 3Q(0) = 3.200 = 600$ (ou seja, o tempo em que cultura de bactérias triplicou). Daí,

$$600 = Q(t_0) = 200e^{\frac{1}{16} \ln(1,12)t_0} \Rightarrow 3 = e^{\frac{1}{16} \ln(1,12)t_0} \Rightarrow \ln(3) = \frac{1}{16} \ln(1,12)t_0.$$

Portanto, $t_0 = \frac{16 \ln(3)}{\ln(1,12)}$.

Questão 4 (2.5 pontos)

Resolva:

$$\begin{cases} 2y'' - 12y' + 18y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases} \quad (4)$$

Solução:

Dividindo por 2 a EDO (4), temos a EDO linear de segunda ordem homogênea:

$$y'' - 6y' + 9y = 0. \quad (5)$$

A polinômio característico associado a (5), é $P(r) = r^2 - 6r + 9$. Resolver (5) é equivalente a resolver a equação característica $0 = P(r) = r^2 - 6r + 9$. As raízes são:

$$r_1 = r_2 = 3, \text{ isto é } P(r) = (r - 3)^2.$$

Logo, a solução geral é:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}; \quad \text{onde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes arbitrárias.}$$

Condições iniciais:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 1; \\ y'(x) &= 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x}; \\ \Rightarrow 2 &= y'(0) = 3C_1 + C_2 = 3.1 + C_2 = 3 + C_2 \Rightarrow C_2 = -1. \end{aligned}$$

Solução final:

$$y(x) = e^{3x} - x e^{3x}.$$