Gabarito - Prova 3 - Cálculo 2

Turma 8-10h, 06/12/2024

December 5, 2024

1ª Questão (2,5 pontos)

Calcule o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^4}.$$

Solução:

Para verificar a existência do limite, analisamos diferentes caminhos que passam por $(0,0)$:

1. Tome $y = x$, a reta que passa por $(0,0)$. Daí,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xx}{x^2+x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

2. Tome $y = -x$, a reta que passa por $(0,0)$. Daí,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xx}{x^2+(-x)^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{x^2}{x^2(1+x^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{1+x^2} = -1.$$

Como os limites acima são distintos, logo, o limite de f em $(0,0)$ não existe.

Solução alternativa: tome $y = mx$, a família de retas que passam por $(0,0)$, onde $m \in \mathbb{R}$ é o coeficiente angular da reta. Daí,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mxx}{x^2+m^4x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^2}{x^2(1+m^4x^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m}{1+m^4x^2} = m.$$

Simplificando, o limite depende de m, logo, o limite não existe. Pois para valores reais distintos de m, o limite é diferente.

2ª Questão (2,5 pontos)

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy + 4x + 2$ que é paralelo ao plano xy.

Solução:

O plano tangente é paralelo ao plano xy se o coeficiente de z for zero, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Resolvendo:

$$y + 4 = 0 \implies y = -4, \quad x = 0. \text{ Daí } f(0, -4) = 2$$

Logo, no ponto $(x, y, z) = (0, -4, 2)$, o plano tangente é:

$$z(x, y) = f(0, -4) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, -4)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, -4)(y - (-4)) \;\Rightarrow\; z = 2.$$

3ª Questão (2,5 pontos)

Seja $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável e

$$x = g(t) \quad \text{e} \quad y = h(t),$$

com os seguintes valores:

$$g(3) = 4, \quad h(3) = 7, \quad g'(3) = 2, \quad h'(3) = -3, \quad f_x(4, 7) = -1, \quad f_y(4, 7) = 9.$$

Determine $\frac{dz}{dt}\Big|_{t=3}$.

Solução:

Usando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, temos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Substituímos os valores fornecidos:

- $g(3) = 4$ e $h(3) = 7$, logo, quando $t = 3$, $x = 4$ e $y = 7$.
- $g'(3) = 2$, ou seja, $\frac{dx}{dt} = 2$.
- $h'(3) = -3$, ou seja, $\frac{dy}{dt} = -3$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(4, 7) = -1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 7) = 9$.

Substituímos na fórmula:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{dz}{dt} = (-1)(2) + (9)(-3).$$

$$\frac{dz}{dt} = -2 - 27 = -29.$$

Portanto,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=3} = -29.$$

4ª Questão (2,5 pontos)

Ache os valores máximos e mínimos de $f(x, y) = 81x^2 + y^2$, sujeitos à restrição $4x^2 + y^2 \leq 9$.

Solução:

A função objetivo é $f(x, y) = 81x^2 + y^2$ e a restrição é $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 9 \leq 0$. O problema é resolvido considerando pontos críticos no interior da região e na fronteira.

Pontualmente, verificamos:

1. **Pontos Críticos no Interior:** Derivamos $f(x, y)$ e igualamos a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 162x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Resolvendo:

$$162x = 0 \implies x = 0, \quad 2y = 0 \implies y = 0.$$

O único ponto crítico no interior é $(x, y) = (0, 0)$. Substituímos:

$$f(0, 0) = 81(0)^2 + (0)^2 = 0.$$

2. **Pontos na Fronteira:** Na fronteira $g(x, y) = 0$, resolvemos $4x^2 + y^2 = 9$ com o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies (162x, 2y) = \lambda(8x, 2y).$$

Logo, $162x - \lambda 8x = 0 \Rightarrow x(81 - \lambda 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\lambda = \frac{81}{4}$. Segue também $2y - \lambda 2y = 0 \Rightarrow 2y(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $\lambda = 1$.

Caso 1: $x = 0$

$$4(0)^2 + y^2 = 9 \implies y = \pm 3.$$

Substituímos:

$$f(0, \pm 3) = 81(0)^2 + (\pm 3)^2 = 9.$$

Caso 2: $y = 0$

$$4x^2 + (0)^2 = 9 \implies x = \pm\frac{3}{2}.$$

Substituímos:

$$f\left(\pm\frac{3}{2}, 0\right) = 81\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 = 182.25.$$

Observação: Quando $\lambda = 1$ ou $\lambda = \frac{81}{4}$, voltamos aos *casos 1 e 2*, verifique.

Conclusão: Os valores extremos são:

- Valor mínimo absoluto: $f(0,0) = 0$ (interior da região).
- Valor máximo absoluto: $f\left(\pm\frac{3}{2}, 0\right) = 182.25$ (fronteira).