TEMPO DE PROVA: 2h.

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1 (2.5 pontos):

Dada a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Encontre a derivada parcial $f_x(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Determine se $f_x(x,y)$ é contínua em $(0,0)$. Justifique sua resposta.

Solução:

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, usamos a regra do quociente. A função é dada por:

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^4+y^2}.$$

A derivada parcial em relação a x é:

$$f_x(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y)\cdot(x^4+y^2) - 3x^2y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}.$$

$$f_x(x,y) = \frac{(6xy)(x^4+y^2) - (3x^2y)(4x^3)}{(x^4+y^2)^2}.$$

Simplificando:

$$f_x(x,y) = \frac{6xy(x^4+y^2) - 12x^5y}{(x^4+y^2)^2}.$$

$$f_x(x,y) = \frac{6x^5y + 6xy^3 - 12x^5y}{(x^4+y^2)^2}.$$

$$f_x(x,y) = \frac{6xy^3 - 6x^5y}{(x^4+y^2)^2}.$$

Portanto, para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{6xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$, a definição de derivada parcial é:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}.$$

Como $f(h,0) = \dfrac{0}{h^4} = 0$ para todo $h \neq 0$ e $f(0,0) = 0$, temos:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Assim, a derivada parcial $f_x(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Para verificar se $f_x(x,y)$ é contínua em $(0,0)$, analisamos o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}.$$

Tomemos o caminho $y = mx$, onde $m \in \mathbb{R}$:

$$f_x(x,mx) = \frac{6x(mx)((mx)^2-x^4)}{(x^4+(mx)^2)^2}.$$

$$f_x(x,mx) = \frac{6x^2m(m^2x^2-x^4)}{(x^4+m^2x^2)^2}.$$

$$f_x(x,mx) = \frac{6x^4m(m^2-x^2)}{(x^4+m^2x^2)^2}.$$

$$f_x(x,mx) = \frac{6x^4m(m^2-x^2)}{x^4(m^2+x^2)^2}.$$

$$f_x(x,mx) = \frac{6m(m^2-x^2)}{(m^2+x^2)^2}.$$

Quando $x \to 0$, temos:

$$f_x(x,mx) \to \frac{6m(m^2-0)}{(m^2+0)^2} = \frac{6m^3}{m^4} = \frac{6}{m}.$$

O limite depende de m, ou seja, do caminho escolhido. Portanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) \text{ não existe.}$$

Logo, $f_x(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$.

Questão 2 (2.5 pontos):

Considere a superfície S definida pela equação $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{3}{4}$. Encontre o ponto $(x_0,y_0,z_0) \in S$ tal que o plano tangente à S nesse ponto seja paralelo ao plano $x - y + z = 1$.

Solução:

A equação $x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{4}$ define uma superfície esférica. Considere $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\dfrac{3}{4}$. O gradiente de $F(x,y,z)$, que é normal à superfície, é dado por:

$$\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,2z).$$

Para que o plano tangente à superfície S em (x_0,y_0,z_0) seja paralelo ao plano $x-y+z=1$, o vetor normal do plano tangente $(\nabla F(x_0,y_0,z_0))$ deve ser paralelo ao vetor normal do plano dado.

O vetor normal ao plano $x-y+z=1$ é:

$$\vec{n}=(1,-1,1).$$

Assim, temos que:

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)=k(1,-1,1).$$

Isto implica que:

$$2x_0=k,\quad 2y_0=-k,\quad 2z_0=k,$$

onde k é uma constante escalar.

Logo:

$$x_0=\frac{k}{2},\quad y_0=-\frac{k}{2},\quad z_0=\frac{k}{2}.$$

Além disso, o ponto (x_0,y_0,z_0) deve satisfazer a equação $x_0^2+y_0^2+z_0^2=\dfrac{3}{4}$. Substituindo:

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(-\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

$$\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}=\frac{3}{4}.$$

$$\frac{3k^2}{4}=\frac{3}{4}.$$

$$k^2=1 \implies k=\pm 1.$$

- Para $k=1$:

$$x_0=\frac{1}{2},\quad y_0=-\frac{1}{2},\quad z_0=\frac{1}{2}.$$

- Para $k=-1$:

$$x_0=-\frac{1}{2},\quad y_0=\frac{1}{2},\quad z_0=-\frac{1}{2}.$$

Os pontos procurados são:

$$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Questão 3 (2.5 pontos):
Um morro possui forma definida pelo gráfico $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4x + 4y$.

a) Uma pessoa está situada no ponto $A = (2,1,7)$. Qual direção ela deve tomar para subir pela parte mais íngreme do morro? Qual a taxa de variação da altura neste ponto?

b) Se a pessoa se mover na direção do vetor $\vec{v} = (-3,4)$, ela estará subindo ou descendo? Qual a taxa?

c) Em que direção ela deve se mover para percorrer um caminho plano?

Solução:

a) O gradiente indica a direção e o sentido de maior crescimento da função. Portanto, para subir pela parte mais íngreme, deve-se seguir a direção e o sentido do gradiente.

$$\nabla f(x,y) = (-2x+4, -2y+4)\,.$$

No ponto $A = (2,1)$:

$$\nabla f(2,1) = (-2(2)+4, -2(1)+4) = (0,2).$$

A pessoa deve subir na direção do vetor $(0,2)$. A taxa de variação da altura nesta direção é dada por:

$$\|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{0^2+2^2} = 2.$$

b) A taxa de variação da função f na direção de $\vec{v}$ é dada por $D_u f(x,y)$, onde $\vec{u}$ é um vetor unitário na direção de $\vec{v}$.

$$\vec{v} = (-3,4), \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5, \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Calculando:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(2,1)\cdot\vec{u} = (0,2)\cdot\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 0\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{5}.$$

Como a taxa é positiva, a pessoa está subindo. A taxa de variação é $\frac{8}{5}$.

c) Para que a pessoa percorra um caminho plano, a taxa de variação da altura deve ser zero. Isso ocorre quando o vetor direção é ortogonal ao gradiente. Seja $\vec{w} = (x_0, y_0)$, então:

$$\nabla f(2,1)\cdot\vec{w} = 0 \implies (0,2)\cdot(x_0,y_0) = 0 \implies 2y_0 = 0.$$

Logo, $y_0 = 0$, e qualquer vetor na forma $\vec{w} = (x_0, 0)$ satisfaz a condição. Tomando $x_0 = 1$, para percorrer um caminho plano é preciso se mover na direção $\vec{w} = (1,0)$.

Questão 4 (2.5 pontos):
Seja $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$ sujeita à condição $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy \leq 1\right\}$.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f no interior da região D.

b) Determine os extremos de f na fronteira da região D.

Solução:

a) A função $f(x, y)$ é diferenciável e seu gradiente é $\nabla f(x, y) = (4x, 4y)$. Para determinar os pontos críticos no interior da região D, fazemos $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, o que implica:

$$4x = 0 \quad \text{e} \quad 4y = 0 \implies x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Portanto, o único ponto crítico no interior é $(0, 0)$. Utilizando o Teste da Derivada Segunda para classificá-lo, obtemos:

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = 4.4 - 0 = 16.$$

Como $H(0, 0) = 16 > 0$ e $f_{xx}(0, 0) = 4 > 0$, então $f(0, 0)$ é um valor mínimo local.

b) Na fronteira da região D, temos a restrição $xy = 1$. Para encontrar os pontos extremos nesta região, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Definimos a função:

$$g(x, y) = xy - 1,$$

e buscamos os pontos que satisfazem:

$$\boxed{\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)} \ \textbf{e} \ \boxed{g(x, y) = 0}.$$

Calculamos os gradientes e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x = \lambda y \\ 4y = \lambda x \\ xy = 1 \end{cases}$$

Pela terceira equação, concluimos que $(x, y) \neq (0, 0)$. Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{4x}{y} = \lambda \\ \dfrac{4y}{x} = \lambda \\ xy = 1 \end{cases}$$

Igualando a primeira equação com a segunda, obtemos:

$$\frac{4x}{y} = \frac{4y}{x} \implies x^2 = y^2 \implies y = \pm x.$$

Substituímos $y = x$ e $y = -x$ na restrição $xy = 1$:

- Para $y = x$, temos:
  $x^2 = 1 \implies x = \pm 1$, logo $(x, y) = (1, 1)$ e $(x, y) = (-1, -1)$.

- Para $y = -x$, temos:
  $x(-x) = 1 \implies -x^2 = 1$, o que não possui solução.

Portanto, os candidatos na fronteira são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Calculamos os valores de $f(x, y)$ nos pontos encontrados:

$$f(1,1) = 2(1)^2 + 2(1)^2 = 4,$$

$$f(-1,-1) = 2(-1)^2 + 2(-1)^2 = 4.$$

Como os valores são iguais, precisamos de um outro ponto qualquer sobre a fronteira $xy = 1$, afim de que seja possível verificar se os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são valores máximos ou mínimos. Tomando o ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, como $f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4} > 4$, então os valores $f(1, 1) = f(-1, -1) = 4$ são mínimos absolutos de f na fronteira $xy = 1$.