Questão 1

Seja a função definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\cos(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Continuidade para $(x,y) \neq (0,0)$

Quando $(x,y) \neq (0,0)$, a função f é composta de funções contínuas (cos, soma, multiplicação e divisão onde o denominador é não nulo). Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Continuidade em $(0,0)$

Para determinar a continuidade em $(0,0)$, analisemos o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ por diferentes caminhos.

a) Caminho ao longo do eixo x, onde $y = 0$

Seja $y = 0$. Neste caso:

$$f(x,0) = \frac{x(0)\cos(x+0)}{x^2+0^2} = 0.$$

Portanto:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

b) Caminho ao longo da reta $y = x$, onde $x \neq 0$

Seja $y = x$. Neste caso:

$$f(x,x) = \frac{x(x)\cos(x+x)}{x^2+x^2} = \frac{x^2\cos(2x)}{2x^2} = \frac{\cos(2x)}{2}.$$

Assim:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{\cos(2\cdot 0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusão

Os limites pelos diferentes caminhos não coincidem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a função f não é contínua no ponto $(0,0)$.

Resumo

A função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e descontínua em $(0,0)$.

Questão 2

Seja S a superfície dada por:

$$e^{y^2-z^2} + 4yz = 5.$$

Determine a equação do plano tangente a S no ponto $P_0 = (2,1,1)$.

Solução

Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $S = F^{-1}(0)$, onde:

$$F(x,y,z) = e^{y^2-z^2} + 4yz - 5.$$

O vetor normal $\vec{N}$ ao plano tangente é dado por $\nabla F(P_0)$. Como:

$$\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right),$$

temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^{y^2-z^2} + 4z, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2ze^{y^2-z^2} + 4y.$$

Calculando ∇F em $P_0 = (2,1,1)$:

$$\nabla F(2,1,1) = \left(0, 2(1)e^{1^2-1^2} + 4(1), -2(1)e^{1^2-1^2} + 4(1) \right).$$

Como $e^{1^2-1^2} = e^0 = 1$, temos:

$$\nabla F(2,1,1) = (0, 2(1)+4, -2(1)+4) = (0,6,2).$$

Portanto, o vetor normal é:

$$\vec{N} = (0,6,2).$$

A equação do plano tangente é dada por:

$$\langle \vec{N}, (x-2, y-1, z-1) \rangle = 0,$$

ou seja:

$$\langle (0,6,2),(x-2,y-1,z-1)\rangle = 0.$$

Calculando o produto interno:

$$0(x-2)+6(y-1)+2(z-1)=0.$$

Expandindo:

$$6y-6+2z-2=0.$$

Simplificando:

$$6y+2z=8.$$

Resposta

A equação do plano tangente à superfície S no ponto $P_0=(2,1,1)$ é:

$$6y+2z=8.$$

Questão 3

Seja $f(x,y) = xe^y$.

Parte (a)

Taxa de variação em $P = (2,0)$ na direção de:

$$\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, 2\right) - (2,0) = \left(-\frac{3}{2}, 2\right).$$

Normalizando o vetor:

$$\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

O gradiente de f é dado por:

$$\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y) \Rightarrow \nabla f(2,0) = (1,2).$$

A taxa de variação direcional é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = (1,2) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1.$$

Parte (b)

Em que direção a função tem a máxima taxa de variação?

Na direção de:

$$\vec{w_1} = \nabla f(P) = (1,2).$$

Parte (c)

Qual é a máxima taxa de variação?

$$\|\nabla f(P)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{5}.$$

Questão 4

Determine os extremos da função $f(x,y) = xy$ quando (x,y) satisfaz $x^2 + 2y^2 = 6$. Seja $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6 = 0$ a equação da curva.

Temos que $f, g \in C^1$, com:

$$\nabla f = (y,x) \quad \text{e} \quad \nabla g = (2x, 4y).$$

Logo, $\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \notin C$. Podemos aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange.

Devemos resolver o sistema:

$$\begin{aligned} 2x(y+\lambda) &= 0, \\ x^2 + 4y\lambda &= 0, \\ x^2 + 2y^2 &= 6. \end{aligned}$$

De (1), $x = 0$ ou $y = -\lambda$.

Caso 1: $x = 0$

De (3), temos $y = \pm\sqrt{3}$, obtendo os pontos:

$$(0, \sqrt{3}) \quad \text{e} \quad (0, -\sqrt{3}).$$

Caso 2: $x = y$

De (2) e (1), temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 &= 0, \\ x^2 + 2y^2 &= 6. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 = 4y^2, \\ x^2 + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Substituindo:

$$6y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Cálculo dos valores de f

$$f(0, \pm\sqrt{3}) = 0,$$

$$f(2,1) = f(-2,1) = 4, \quad f(2,-1) = f(-2,-1) = -4.$$

Conclusão

O máximo é atingido em $(2, 1)$ e $(-2, 1)$, valendo 4.
O mínimo é atingido em $(2, -1)$ e $(-2, -1)$, valendo -4.