Gabarito - Cálculo Diferencial e Integral 2 2024.2 - MAC128

Instituto de Matemática - IM/UFRJ

Prova 2 - Turma 8-10h – 11 de outubro de 2024

Questão 1 (2.5 pontos)

1. **Equação da reta tangente (1º solução):**

   Dada a curva parametrizada:

   $$x(t) = t^3 - 12t, \quad y(t) = t^2 - 6t.$$

   Para encontrar o ponto onde a reta tangente será calculada, precisamos determinar t tal que $(x(t), y(t)) = (-16, -8)$.

   Para $t = 2$:

   $$x(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16,$$
   $$y(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 = 4 - 12 = -8.$$

   Portanto, o ponto em $t = 2$ é $(-16, -8)$.

   Agora, precisamos calcular as derivadas:

   $$x'(t) = 3t^2 - 12, \quad y'(t) = 2t - 6.$$

   Avaliando em $t = 2$:

   $$x'(2) = 3(2^2) - 12 = 12 - 12 = 0,$$
   $$y'(2) = 2(2) - 6 = 4 - 6 = -2.$$

   A reta tangente é dada pela forma paramétrica:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -16 \\ y = -8 - 2s. \end{cases}$$

   2ª solução:

   A equação da reta tangente na forma cartesiana no ponto $(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0))$ pode ser obtida a partir de: $y - y_0 = \frac{dy}{dx}(t_0)(x - x_0)$, onde $\frac{dy}{dx}(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ em que $x'(t_0) \neq 0$. Daí, a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente é dada por:

   $$m = \frac{dy}{dx}|_{t_0=2} = \frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{-2}{0}.$$

   Como $x'(2) = 0$, a reta tangente é vertical. Portanto, a equação cartesiana é:

   $$x = -16.$$

2. **Pontos onde a reta tangente é vertical e horizontal:**

   A reta tangente é vertical quando $x'(t) = 0$:

   $$3t^2 - 12 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2.$$

   - Para $t = 2$:

   $$x(2) = -16, \quad y(2) = -8.$$

- Para $t = -2$:

$$x(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16, \quad y(-2) = (-2)^2 - 6(-2) = 4 + 12 = 16.$$

O ponto correspondente é $(16, 16)$.

A reta tangente é horizontal quando $y'(t) = 0$:

$$2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3.$$

Para $t = 3$:

$$x(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 = 27 - 36 = -9, \quad y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 - 18 = -9.$$

Assim, temos:

- Ponto de tangente vertical em $t = 2$: $(-16, -8)$.
- Ponto de tangente vertical em $t = -2$: $(16, 16)$.
- Ponto de tangente horizontal em $t = 3$: $(-9, -9)$.

Questão 2 (2.5 pontos)

1. **Equação do plano:**

   Seja $P(1, 2, 3)$, $Q(4, 5, 7)$ e $R(1, 0, 1)$. Os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são:

   $$\overrightarrow{PQ} = (3, 3, 4) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PR} = (0, -2, -2).$$

   O vetor normal $\mathbf{n}$ é dado pelo produto vetorial:

   $$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 6, -6).$$

   A equação do plano é:

   $$2(x - 1) + 6(y - 2) - 6(z - 3) = 0 \Rightarrow 2x + 6y - 6z = -4 \Rightarrow \boxed{x + 3y - 3z = -2}.$$

2. **Área do triângulo $\triangle PQR$:**

   A área é dada por:

   $$\text{Área} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{76} = \sqrt{19}.$$

Questão 3 (2.5 pontos)

1. **Identificação e esboço da superfície:**

   A superfície $9x^2 - y^2 + 3z^2 + 9 = 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{3} = 1$, é um hiperbolóide elíptico de duas folhas.

Para esboçar, considere cortes nos planos coordenados e observe a forma dos cortes.

- Corte no plano $y = 0$:

  $$-x^2 - \frac{z^2}{3} = 1 \Rightarrow \text{ conjunto vazio.}$$

  Vamos ver a variação de y. Veja,

  $-x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{3} = 1 \Rightarrow -x^2 - \frac{z^2}{3} = 1 - \frac{y^2}{9} \Rightarrow x^2 + \frac{z^2}{3} = \frac{y^2}{9} - 1 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 9 \Rightarrow |y| \geq 3 \Rightarrow y \geq 3$ ou $y \leq -3$. Se $y = \pm 3$ temos dois pontos $(0, -3, 0)$ e $(0, 3, 0)$, pois $x^2 + \frac{z^2}{3} = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

- Corte nos planos $y = \pm 4$:

  $x^2 + \frac{z^2}{3} = \frac{(\pm 4)^2}{9} - 1 = \frac{16-9}{9} = \frac{7}{9}$. Dividindo por $\frac{7}{9}$, temos uma elipse:

  $\frac{x^2}{\frac{7}{9}} + \frac{z^2}{\frac{7}{3}} = 1.$

- Corte no plano $z = 0$:

$$9x^2 - y^2 + 9 = 0 \Rightarrow 9x^2 - y^2 = -9 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - x^2 = 1.$$

Esta é a equação de uma hipérbole no plano zy.

- Corte no plano $x = 0$:

$$-y^2 + 3z^2 + 9 = 0 \Rightarrow y^2 - 3z^2 = 9 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{3} = 1.$$

Esta é a equação de uma hipérbole no plano yz.

Portanto o esboço da superfície é:

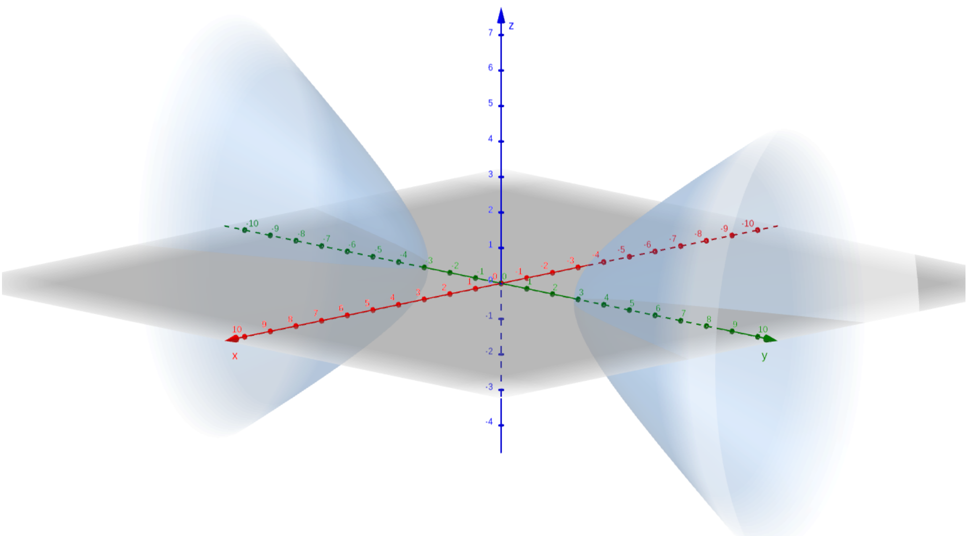

Figure 1: Hiperbolóide elíptico de duas folhas dado por: $-x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{3} = 1$.

2. **Equação paramétrica da curva de interseção com $y = 4$:**
Substituindo $y = 4$ na equação da superfície, obtemos: $\frac{x^2}{\frac{7}{9}} + \frac{z^2}{\frac{7}{3}} = 1$ uma elipse. Onde podemos parametrizá-la de várias formas:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sqrt{7}}{3} sin(t), \\ z(t) = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} cos(t), \quad \text{com } t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Ou,

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sqrt{7}}{3} cos(t), \\ z(t) = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} sin(t), \quad \text{com } t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Ou,

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ z(t) = \pm\sqrt{\dfrac{7 - 9t^2}{3}}, \quad \text{com } t \in [-\dfrac{\sqrt{7}}{3}, \dfrac{\sqrt{7}}{3}]. \end{cases}$$

Questão 4 (2.5 pontos)

Seja $r(t) = (3t, \cos(2t), \sin(2t))$.

1. **Equação da reta tangente em $t = 0$:**

   Quando $t = 0$, temos o ponto na curva dado por: $r(0) = (0, 1, 0)$. A derivada de $r(t)$ é:

   $$r'(t) = (3, -2\sin(2t), 2\cos(2t)).$$

   Em $t = 0$, obtemos:

   $$r'(0) = (3, 0, 2).$$

   A equação da reta tangente é:

   $$(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(3, 0, 2).$$

2. **Equação do plano tangente em $t = 0$:**

   O vetor normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ ao plano tangente é perpendicular ao vetor tangente $r'(0) = (3, 0, 2)$. Daí, $< \mathbf{n}, r'(0) >=< (a, b, c), (3, 0, 2) >= 0$, logo, $3a + 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{-3a}{2}$. Podemos escolher valores para a e b (que é livre). Tome $a = b = 2$, logo $c = -3$, com efeito $\mathbf{n} = (2, 2, -3)$. A equação do plano tangente a curva dada no ponto $r(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ é:

   $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow 2(x - 0) + 2(y - 1) - 3(z - 0) = 0 \Rightarrow \boxed{2x + 2y - 3z = 2}.$$

   Note que podemos ter vários outros vetores normais ao plano tangente.

3. **Comprimento de arco entre $t = 0$ e $t = \pi$:**

   O comprimento de arco é dado por:

   $$L = \int_0^{\pi} \|r'(t)\| \, dt = \int_0^{\pi)} \sqrt{9 + [-2sin(2t]^2 + [2cos(2t)]^2} \, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{9 + 4} \, dt = \sqrt{13}\pi.$$