TEMPO DE PROVA: 2h.

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1 (2.5 pontos):
Dados os planos:

$$\Pi_1 : x + 4y - 3z = 1$$
$$\Pi_2 : -3x + 6y + 7z = 0$$

a) Determine o ângulo entre os planos.
b) Determine uma equação paramétrica da reta interseção dos planos.
c) Qual o ponto de interseção da reta com o plano xy?

Solução:

(a) O ângulo formado entre dois planos é igual ao ângulo entre os seus respectivos vetores normais. Sejam $\vec{n}_1 = (1, 4, -3)$ e $\vec{n}_2 = (-3, 6, 7)$ os vetores normais de Π_1 e Π_2, respectivamente. O cosseno do ângulo θ entre os planos é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Calculando o produto escalar:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1(-3) + 4(6) + (-3)(7) = -3 + 24 - 21 = 0$$

Portanto,

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Os planos são perpendiculares.

(b) A equação paramétrica da reta de interseção entre os planos pode ser obtida resolvendo o sistema formado pelas equações de ambos os planos:

$$\Pi_1 : x + 4y - 3z = 1$$
$$\Pi_2 : -3x + 6y + 7z = 0$$

Primeiramente, isolamos x na equação Π_1, resultando em:

$$x = 1 - 4y + 3z$$

Em seguida, substituímos essa expressão para x na equação Π_2:

$$-3(1 - 4y + 3z) + 6y + 7z = 0$$

Simplificando, obtemos:

$$-3 + 12y - 9z + 6y + 7z = 0 \quad \Rightarrow \quad 18y - 2z = 3$$

Agora, isolando y em função de z e admitindo $z = t$ como parâmetro, obtemos:

$$y = \frac{1}{6} + \frac{t}{9}$$

Substituindo y e $z = t$ na expressão encontrada para x, temos:

$$x = 1 - 4\left(\frac{1}{6} + \frac{t}{9}\right) + 3t = \frac{1}{3} + \frac{23t}{9}$$

Portanto, a equação paramétrica da reta de interseção é dada por:

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{23t}{9}, \frac{1}{6} + \frac{t}{9}, t\right), t \in \mathbb{R}.$$

(c) O ponto de interseção com o plano xy ocorre quando $z = 0$. Substituindo $z = 0$ em $\mathbf{r}(t)$, obtemos $t = 0$. Portanto, o ponto de interseção é $\mathbf{r}(0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0\right)$.

Questão 2 (2.5 pontos):
Dada a superfície:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 3 = 0$$

a) Classifique-a.

b) Qual é a interseção da superfície com o plano $y = 1$? Identifique a curva fornecendo suas características.

Solução:

(a) Reorganizando os termos:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) + (z^2 - 2z) + 3 = 0$$

Completando os quadrados:

$$(x-2)^2 - (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

Trate-se de um hiperbolóide de uma folha, cujo centro é $(2, -1, 1)$.

(b) Substituindo $y = 1$ na equação da superfície e simplificando:

$$(x-2)^2 - (2)^2 + (z-1)^2 = 1$$

$$(x-2)^2 + (z-1)^2 = 5$$

A curva resultante é uma circunferência de centro $(2, 1, 1)$ e raio $\sqrt{5}$.

Questão 3 (2.5 pontos):

Duas partículas começam no instante $t = 0$ a percorrer as trajetórias definidas por

$$r(t) = (-2t, 2 - 2t) \text{ e } s(t) = (2\cos(\pi t), 2\sin(\pi t)),\ t \geq 0.$$

(a) Esboce o gráfico das linhas parametrizadas anteriores.

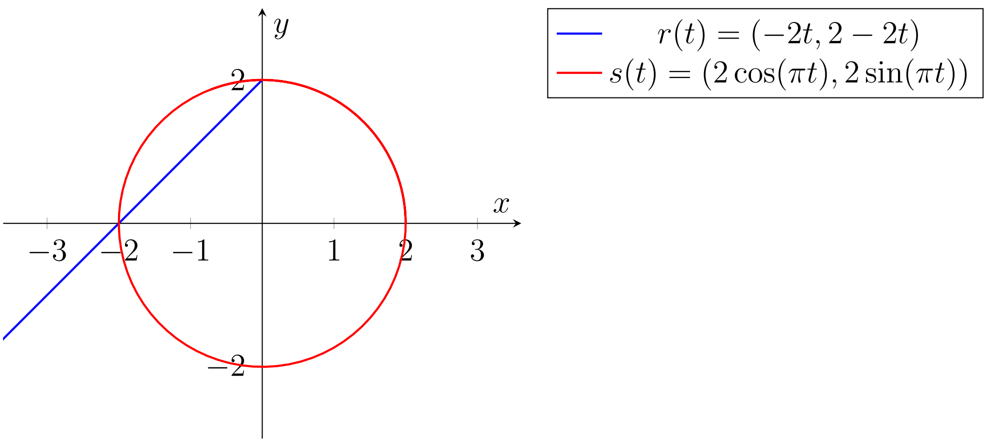
(b) Determine, se existirem, os pontos onde os referidos gráficos se intersetam.

(c) Diga, justificando, se existe algum ponto onde se dê a colisão das partículas.

Solução:

(a) A função vetorial $r(t) = (-2t, 2 - 2t)$ representa a parametrização de uma semirreta. Como $t \geq 0$, temos que $x(t) = -2t \leq 0$, o que implica que $x \leq 0$. Eliminando o parâmetro t, obtemos a equação cartesiana da reta $y = x + 2$, válida para $x \leq 0$.

Por outro lado, a função vetorial $s(t) = (2\cos(\pi t), 2\sin(\pi t))$ parametriza a curva $x^2 + y^2 = 4$, que é uma circunferência de raio 2 e centro na origem. Essa parametrização descreve múltiplas voltas ao longo da circunferência, à medida em que t varia. Dessa forma, o esboço das trajetórias é dado por:



(b) Os pontos de interseção são encontrados ao resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 4$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = -2.$$

Portanto, os gráficos possuem interseção nos pontos $(0, 2)$ e $(-2, 0)$.

(c) Vamos verificar em quais instantes as trajetórias $r(t)$ e $s(t)$ atingem os pontos de interseção identificados.

Temos que $r(t) = (0, 2)$ para $t = 0$. Por outro lado, $s(t) = (0, 2)$ ocorre para $t = \dfrac{1}{2}$. Portanto, as trajetórias $r(t)$ e $s(t)$ atingem o ponto $(0, 2)$ em instantes diferentes, logo, não há colisão nesse ponto.

No entanto, $r(t)$ e $s(t)$ atigem o ponto $(-2, 0)$ quando $t = 1$. Portanto, as partículas colidem em $(-2, 0)$ no instante $t = 1$.

Questão 4 (2.5 pontos):

Uma partícula inicia seu movimento a partir da posição inicial $r(0) = (1, 0, 0)$ com velocidade inicial $v(0) = (1, -1, 1)$. Sua aceleração é dada por $a(t) = (4t, -6\sin(2t), 1)$, $t \geq 0$. Determine a velocidade e a posição da partícula no instante t. Determine, também, a sua velocidade escalar em $t = 1$.

Nota: Considere $\cos(2) = 1$.

Solução:

A velocidade $v(t)$ é dada pela integral da aceleração $a(t)$, com a condição inicial $v(0) = (1, -1, 1)$.

$$v(t) = \int a(t)dt$$

Integrando cada componente de $a(t)$, obtemos:

$$v(t) = \left(2t^2 + C_1, 3\cos(2t) + C_2, t + C_3\right), \text{onde } C_1, C_2 \text{ e } C_3 \in \mathbb{R}.$$

Substituindo $t = 0$ e comparando com a condição inicial $v(0) = (1, -1, 1)$, obtemos:

$$v(0) = (C_1, 3 + C_2, C_3) = (1, -1, 1)$$

Portanto, $v(t) = \left(2t^2 + 1, 3\cos(2t) - 4, t + 1\right)$.

O vetor posição $r(t)$ é dado pela integral da velocidade $v(t)$, com a condição inicial $r(0) = (1, 0, 0)$.

$$r(t) = \int v(t)dt$$

Novamente, integramos cada componente, obtemos:

$$r(t) = \left(\frac{2t^3}{3} + t + C_4, \frac{3\,\text{sen}\,(2t)}{2} - 4t + C_5, \frac{t^2}{2} + t + C_6\right), \text{onde } C_4, C_5 \text{ e } C_6 \in \mathbb{R}.$$

Substituindo $t = 0$ e comparando com a condição inicial $r(0) = (1, 0, 0)$, obtemos:

$$r(0) = (C_4, C_5, C_6) = (1, 0, 0)$$

Assim, o vetor posição é $r(t) = \left(\dfrac{2t^3}{3} + t + 1, \dfrac{3\,\text{sen}\,(2t)}{2} - 4t, \dfrac{t^2}{2} + t\right)$.

Por fim, a velocidade escalar é o módulo do vetor velocidade $v(t)$. No instante $t = 1$, temos:

$$v(1) = (2(1)^2 + 1, 3\cos(2) - 4, 1 + 1) = (3, -1, 2)$$

Agora, calculamos o módulo de $v(1)$:

$$|v(1)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

Portanto, a velocidade escalar em $t = 1$ é $\sqrt{14}$.