Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática
P2-C2 - 11-10-24
Turma 10:00-12:00

Não é permitido se ausentar da prova, nem usar qualquer tipo de aparelho eletrônico, como calculadora, celular, etc, durante a mesma.

1^a **Questão (2,5 pontos):**

Seja C uma curva do espaço euclideano dada pela interseção do cilindro $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ com o plano $x+z=2$. Encontre uma parametrização de tal curva.

Sol.- Seja $(x,y,z)\in C$. Logo, x e y satisfazem $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Assim, $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Como $z=2-x$, então $z=2-2\cos t$.

$$\sigma(t)=(2\cos t, 3\sin t, 2-2\cos t), \quad 0\leq t\leq 2\pi \tag{1}$$

é uma parametrização de C.

2^a **Questão (2,5 pontos):**

Encontre a equação cartesiana do plano Π que contém o eixo-z e a reta L de equações paramétricas

$$x=t, \quad y=t, \quad z=t, \quad t\in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sol.- Um vetor direção para a reta L é dada por $u=(1,1,1)$, como um vetor direção para o eixo-z pode ser tomado como sendo $v=(0,0,1)$. Então podemos tomar um vetor normal para o plano Π como sendo o vetor $N=u\times v=(1,-1,0)$. Como a reta L e o eixo-z se interseptam na origem $p_0=(0,0,0)$ então $(0,0,0)\in\Pi$, já que ambas, a reta L e o eixo-z estão em Π.

Seja $p=(x,y,z)\in\Pi$ um ponto fixo, arbitrário do plano Π, então:

$$\langle p-p_0, N\rangle=\langle (x,y,z)-(0,0,0),(1,-1,0)\rangle=0 \tag{3}$$

obtendo $x-y=0$ que é uma equação cartesiana do plano que estamos procurando.

3^a **Questão (2,5 pontos):**

Uma particula se desloca no espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ e tem traço determinado pela função vetorial

$$r(t)=(3\cos t, 3\sin t, 4t), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Determine uma parametrização do deslocamento da particula de modo que ela se mova com velocidade escalar unitária.

Sol.- A parametrização do deslocamento satisfaz $||r'(t)|| = 5$. Consideremos agora o comprimeto do arco da trajetória dada pelo intervalo $[0, t]$, para um t arbitrário, então

$$s = \int_0^t ||r'(t)||dt = 5t \tag{5}$$

Potemos expressar assim o paramêtro t em função do comprimento s, com isto

$$\beta(s) = r(t(s)) = \left(3\cos\left(\frac{s}{5}\right), 3\sin\left(\frac{s}{5}\right), 4\frac{s}{5}\right) \tag{6}$$

É uma reparametrização com do deslocamento com $||\beta'(s)|| = 1$.

4^a **Questão (2,5 pontos):**

Identifique e esboçe a figura após rotar o gráfico da equação $y^2 = 1 + z^2$ em torno do eixo-z.

Sol.- Obtemos o hiperbóloide de uma folha de equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \tag{7}$$

Cujo gráfico é dado por: