



Não é permitido se ausentar da prova, nem usar qualquer tipo de aparelho eletrônico, como calculadora, celular, etc, durante a mesma.

1ª Questão (2,5 pontos):

Seja C uma curva do espaço euclidiano dada pela interseção do cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ com o plano $x + z = 2$. Encontre uma parametrização de tal curva.

Sol.- Seja $(x, y, z) \in C$. Logo, x e y satisfazem $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Assim, $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como $z = 2 - x$, então $z = 2 - 2 \cos t$.

$$\sigma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, 2 - 2 \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

é uma parametrização de C .

2ª Questão (2,5 pontos):

Encontre a equação cartesiana do plano Π que contém o eixo- z e a reta L de equações paramétricas

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Sol.- Um vetor direção para a reta L é dada por $u = (1, 1, 1)$, como um vetor direção para o eixo- z pode ser tomado como sendo $v = (0, 0, 1)$. Então podemos tomar um vetor normal para o plano Π como sendo o vetor $N = u \times v = (1, -1, 0)$. Como a reta L e o eixo- z se intersectam na origem $p_0 = (0, 0, 0)$ então $(0, 0, 0) \in \Pi$, já que ambas, a reta L e o eixo- z estão em Π .

Seja $p = (x, y, z) \in \Pi$ um ponto fixo, arbitrário do plano Π , então:

$$\langle p - p_0, N \rangle = \langle (x, y, z) - (0, 0, 0), (1, -1, 0) \rangle = 0 \quad (3)$$

obtendo $x - y = 0$ que é uma equação cartesiana do plano que estamos procurando.

3ª Questão (2,5 pontos):

Uma partícula se desloca no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ e tem traço determinado pela função vetorial

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Determine uma parametrização do deslocamento da partícula de modo que ela se mova com velocidade escalar unitária.

Sol.- A parametrização do deslocamento satisfaz $\|r'(t)\| = 5$. Consideremos agora o comprimento do arco da trajetória dada pelo intervalo $[0, t]$, para um t arbitrário, então

$$s = \int_0^t \|r'(t)\| dt = 5t \quad (5)$$

Potemos expressar assim o parâmetro t em função do comprimento s , com isto

$$\beta(s) = r(t(s)) = \left(3 \cos\left(\frac{s}{5}\right), 3 \sin\left(\frac{s}{5}\right), 4\frac{s}{5} \right) \quad (6)$$

É uma reparametrização com do deslocamento com $\|\beta'(s)\| = 1$.

4ª Questão (2,5 pontos):

Identifique e esboce a figura após rotar o gráfico da equação $y^2 = 1 + z^2$ em torno do eixo- z .

Sol.- Obtemos o hiperbóloide de uma folha de equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (7)$$

Cujo gráfico é dado por:

