Gabarito da Prova 1 - Cálculo 2 - IM/UFRJ - Turma 8-10h - 2024-2

Notação: EDO = Equação Diferencial Ordinária, PVI=Problema do Valor Inicial e $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Questão 1 (2.5 pontos)

(a) Determine a solução geral explícita $y(x)$ da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xye^x. \qquad (\star)$$

(b) Se $y(0) = 1$ ache o valor da constante.

Solução, item (a): Fazendo a separação das variáveis em $(\star)$, temos:

$$\frac{dy}{y} = xe^x dx. \tag{1}$$

Agora, integrando em ambos os lados em (1), segue

$$\int \frac{dy}{y} = \int xe^x dx, \tag{2}$$

daí,

$$ln(|y|) = \int xe^x dx + c, \tag{3}$$

aplicando do lado direito de (3), a técnica de integração por partes, então se $u = x$, logo $du = dx$, e $dv = e^x$ implica $v = e^x$. Assim, $\int xe^x dx = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$. Agora, voltando em (3), segue

$$ln(|y|) = e^x(x-1) + c, \tag{4}$$

aplicando em (4) exponencial em ambos os lados, temos

$$|y| = e^{e^x(x-1)+c} = e^c e^{e^x(x-1)}, \tag{5}$$

assim,

$$y = \pm e^c e^{e^x(x-1)} = Ce^{e^x(x-1)}, \quad \text{com } C = \pm e^c \neq 0. \tag{6}$$

Portanto, a solução geral da EDO $(\star)$ é:

$$y(x) = Ce^{e^x(x-1)}, \quad \text{com } C \in \mathbb{R};\ C \neq 0. \tag{7}$$

Solução, item (b): Veja que, $y(0) = 1$, daí fazendo $x = 0$ em (7), segue

$$1 = y(0) = Ce^{e^0(0-1)} = Ce^{-1} = \frac{C}{e} \quad \Longrightarrow \quad C = e. \tag{8}$$

Portando, usando (8), a solução da EDO $(\star)$ que satisfaz $y(0) = 1$ é dada por:

$$y(x) = ee^{e^x(x-1)} = e^{1+e^x(x-1)}.$$

Questão 2 (2.5 pontos)

(a) Determine a solução geral explícita $y(x)$ da equação diferencial

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+3xy=6x. \qquad (\star 1)$$

(b) Utilize o resultado do item (a) para obter a solução do problema de valor inicial $y(0)=-2$

Solução, item (a): Observando em $(\star 1)$, que $x^2+1\neq 0$, daí

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3x}{x^2+1}y(x)=\frac{6x}{x^2+1}, \tag{9}$$

em que, a equação (9) é uma EDO linear de primeira ordem na forma reduzida $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$, onde $p(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ e $q(x)=\frac{6x}{x^2+1}$. Usando o fator de integração $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$, temos que

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx}y'(x)+e^{\int p(x)dx}p(x)y(x)}_{=\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y(x)\right)}=e^{\int p(x)dx}q(x), \tag{10}$$

agora integrando (10), em ambos os lados, temos

$$e^{\int p(x)dx}y(x)=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C, \tag{11}$$

consequentemente, a solução geral de uma EDO de primeira ordem na forma reduzida $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ é:

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\Big[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\Big]. \tag{12}$$

Voltando agora para (9), onde $p(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ e $q(x)=\frac{6x}{x^2+1}$, e usando (12), veja:

- $e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{3x}{x^2+1}dx}=e^{\frac{3}{2}ln(x^2+1)}=e^{ln\left((x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)}=(x^2+1)^{\frac{3}{2}};$
- $e^{-\int p(x)dx}=e^{-\int \frac{3x}{x^2+1}dx}=e^{-\frac{3}{2}ln(x^2+1)}=e^{ln\left((x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\right)}=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}};$
- $$\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx=\int (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{6x}{x^2+1}dx=6\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}xdx. \tag{13}$$

Em (13), tomando $u=x^2+1$, $\frac{du}{2}=xdx$, daí, $6\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}xdx=6\int (u)^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2}=3\int (u)^{\frac{1}{2}}du=3\frac{(u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=2(u)^{\frac{3}{2}}=2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$. Disto em (13),

- $\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx=\int (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{6x}{x^2+1}dx=6\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}xdx=2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}.$

Voltando em (12), e substituindo as integrais acima calculadas, temos:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int p(x)dx}\Big[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\Big] \\ &= (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\Big[2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\Big] \\ &= 2+C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Com isso, a solução geral de ($\star 1$) é:

$$y(x) = 2 + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}, \text{ com } \quad C \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Solução, item (b): Veja que, $y(0) = -2$, daí fazendo $x = 0$ em (14), segue

$$-2 = y(0) = 2 + C(0^2+1)^{-\frac{3}{2}} = 2 + C \quad \Longrightarrow C = -4. \tag{15}$$

Daí, usando (15), a solução da EDO ($\star 1$) que satisfaz $y(0) = -2$ é dada por:

$$y(x) = 2 - 4(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Questão 3 (2.5 pontos)

Dada a equação diferencial de segunda ordem:

$$y'' + y = 4x + 10\sin(x). \qquad (\star 2)$$

Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial com as condições $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 2$.

Solução:

Passo 1: Primeiramente, vamos determinar $y_h(x)$, isto é, a solução da EDO homogênea ($y''+y=0$) associada a ($\star 2$). Daí, as raízes do polinômio característico associado é: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = \pm i$. Portanto,

$$y_h(x) = C_1 cos(x) + C_2 sin(x). \tag{16}$$

Passo 2: Vamos determinar $y_p(x)$ solução particular de ($\star 2$) via o método dos coeficientes indetermidados (ou à determinar), de modo que $y_p(x)$ não esteja em $y_h(x)$. Note que, o lado direito da EDO ($\star 2$) é: $4x + 10sin(x)$. Daí, buscamos $y_p(x)$ da forma:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax + B + x\big(Ccos(x) + Dsin(x)\big) \\ &= Ax + B + Cxcos(x) + Dxsin(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Agora, derivando duas vezes (17),

$$\begin{cases} y_p'(x) = A + Ccos(x) - Cxsin(x) + Dsin(x) + Dxcos(x); \\ y_p''(x) = -Csin(x) - Csin(x) - Cxcos(x) + Dcos(x) + Dcos(x) - Dxsin(x), \\ \qquad\quad = -2Csin(x) + 2Dcos(x) - Cxcos(x) - Dxsin(x). \end{cases}$$

Substituindo em ($\star 2$), fica $y_p''(x) + y_p(x) = 4x + 10sin(x)$, donde agrupando termo a termo, obtemos um sistema de equações que resultou em:

$$A = 4,\ B = 0,\ -2C = 10,\ D = 0.$$

Assim,

$$A = 4,\ B = 0,\ -C = -5,\ D = 0.$$

O que acarreta a solução particular $y_p(x)$, em (17), ser:

$$y_p(x) = 4x - 5xcos(x). \tag{18}$$

Passo 3: A solução geral da EDO ($\star 2$) é dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Portanto, de (16) e (18), $\boxed{y(x) = C_1 cos(x) + C_2 sin(x) + 4x - 5xcos(x).}$

Agora precisamos verificar as condições iniciais: $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 2$. Note,

- $y(\pi) = 0$, daí,

$$\begin{aligned} 0 = y(\pi) &= C_1 cos(\pi) + C_2 sin(\pi) + 4\pi - 5(\pi)cos(\pi), \\ &= C_1(-1) + 4(\pi) - 5(\pi)(-1) = -C_1 + 9\pi \Rightarrow C_1 = 9\pi. \end{aligned} \tag{19}$$

- $y'(\pi) = 2$, daí $y'(x) = -C_1 sin(x) + C_2 cos(x) + 4 - 5cos(x) + 5xsin(x)$, e

$$\begin{aligned} 2 = y'(\pi) &= -C_1 sin(\pi) + C_2 cos(\pi) + 4 - 5cos(\pi) + 5(\pi)sin(\pi), \\ &= C_2(-1) + 4 - 5(-1) = -C_2 + 9 \implies C_2 = 9 - 2 = 7. \end{aligned} \tag{20}$$

Agora usando $C_1 = 9\pi$ e $C_2 = 7$, encontrados em (19) e (20), na solução geral encontrada, temos a solução da EDO ($\star 2$) satisfazendo $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 2$, dada por: $\boxed{y(x) = 9\pi cos(x) + 7sin(x) + 4x - 5xcos(x).}$

Questão 4 (2.5 pontos) Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Ao fim de 10 *min*, cresceu 4%.

(a) Determine a constante de proporcionalidade.

(b) Quanto tempo levará a cultura para duplicar?

Solução, item (a): Sejam $P(t)$=quantidade de bactérias presentes, e t=tempo a variável indenpendente. Pela hipótese do problema, temos:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t), \tag{21}$$

em que k é a constante de proporcionalidade.

Condições iniciais: Quando $t = 0$, temos $P(0) = P_0$, onde P_0=número de bactérias inicial. Após, 10 *min*, o número de bactérias inicial cresceu 4%, daí, $P(10) = P_0 + 4\% P_0 = P_0 + \frac{4}{100} P_0 = \frac{104}{100} P_0 = \frac{26}{25} P_0$, ou seja, $P(10) = \frac{26}{25} P_0$.

Usando técnica de separação de variáveis em (21), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{P(t)} = kdt \Rightarrow ln(|P(t)|) = kt + c \Rightarrow |P(t)| = e^{kt+c} = e^c e^{kt} \Rightarrow \\ \Rightarrow P(t) = \underbrace{\pm e^c}_{=C} e^{kt} = Ce^{kt}, \end{aligned}$$

isto é, $P(t) = Ce^{kt}$ é a solução geral de (21). Agora, vamos verificar as condições iniciais. Como $P(0) = P_0$, segue

$$P_0 = P(0) = Ce^{k0} = C \quad \implies C = P_0. \tag{22}$$

Portanto, $P(t) = P_0 e^{kt}$. Agora, usando a condição $P(10) = \frac{26}{25}P_0$, vamos determinar a constante de proporcionalidade k. De fato,

$$\frac{26}{25}P_0 = P(10) = P_0 e^{k(10)} \quad \Rightarrow \quad \frac{26}{25} = e^{10k} \quad \Rightarrow \quad ln\Big(\frac{26}{25}\Big) = 10k,$$

logo, $k = \frac{1}{10}ln\Big(\frac{26}{25}\Big)$. Com efeito, $\boxed{P(t) = P_0 e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{26}{25}\right)t}.}$

Solução, item (b): Queremos determinar um tempo t_0 de modo que, $P(t_0) = 2P_0$ (ou seja, o tempo em que a população inicial de bactérias duplicou). Daí,

$$2P_0 = P(t_0) = P_0 e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{26}{25}\right)t_0} \Rightarrow 2 = e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{26}{25}\right)t_0} \Rightarrow ln(2) = \frac{1}{10}ln(\frac{26}{25})t_0.$$

Portanto, $t_0 = \frac{10ln(2)}{ln\left(\frac{26}{25}\right)}$.