TEMPO DE PROVA: 2h.

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1 (2.5 pontos):
Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} &= \dfrac{ty^3}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y(0) &= 1. \end{cases} \tag{1}$$

Solução:
Se considerarmos $y \neq 0$, podemos separar as variáveis

$$\frac{1}{y^3}dy = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

Integrando a equação em ambos os lados

$$\int y^{-3}dy = \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

Utilizando o método da substituição para resolver a segunda integral, obtemos

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+t^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Substituindo condição inicial $y(0) = 1$

$$-\frac{1}{2} = 1 + C$$

$$C = -\frac{3}{2}.$$

Portanto, a solução geral do PVI é dada por

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+t^2} - \frac{3}{2}.$$

Considerando o caso em que $y = 0$, a equação (1) será $\dfrac{dy}{dt} = 0$, cuja solução é $y(t) = C_1$, onde $C_1 \in \mathbb{R}$. Como $y(0) = 1$, então $C_1 = 1$.

Questão 2 (2.5 pontos):
Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} ty' + 2y = \sin t, \quad t > 0 \\ y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Solução:

Para reescrever a equação na forma padrão, podemos dividir ambos os lados da equação por t, tendo em vista que $t > 0$. Dessa forma,

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t}.$$

Portanto, $p(t) = \dfrac{2}{t}$ e $q(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.
O fator de integração é $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = t^2$. Multiplicando ambos lados da equação $y' + \dfrac{2}{t}y = \dfrac{\sin t}{t}$ por $\mu(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} t^2y' + t^2\frac{2}{t}y &= t^2\frac{\sin t}{t} \\ t^2y' + 2ty &= t\sin t \\ \frac{d}{dt}(t^2y) &= t\sin t. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados da equação:

$$\int \frac{d}{dt}(t^2y)dt = \int t\sin t dt.$$

Usando integração por partes:

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \sin t dt \\ du &= dt & v &= -\cos t \end{aligned}$$

assim,

$$\int t\sin t dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t.$$

Portanto,

$$t^2y = -t\cos t + \sin t + C, C \in \mathbb{R}.$$

A solução geral é dada por

$$y(t) = -\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} + \frac{C}{t^2}.$$

Resolvendo o PVI:

$$\begin{aligned} y(\pi) = -\frac{\cos \pi}{\pi} + \frac{\sin \pi}{\pi^2} + \frac{C}{\pi^2} &= 0 \\ \frac{1}{\pi} + \frac{C}{\pi^2} &= 0 \\ \frac{C}{\pi^2} &= -\frac{1}{\pi} \\ C &= -\pi. \end{aligned}$$

A solução para o PVI é dada por

$$y(t) = -\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\pi}{t^2}.$$

Questão 3 (2.5 pontos):
Considere a seguinte equação diferencial

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + 3. \tag{3}$$

(a) Classifique a EDO (3).
(b) Determine a solução da equação homogênea associada à EDO (3).
(c) Determine a solução geral da EDO (3).

Solução:

(a) É uma EDO de segunda ordem linear com coeficientes constantes e não-homogênea.

(b) A EDO homogênea associada é

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

A equação característica é $r^2 - 2r - 3 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = 3$. Portanto, a solução da equação homogênea associada à (3) é

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x},$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

(c) Desejamos encontrar uma solução particular para a EDO não-homogênea, com $g(x) = e^{3x} + 3$. Considere $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, utilizaremos o método dos coeficientes indeterminados.

A solução particular para $f_1(x) = e^{3x}$ pode ser encontrada através da função $y_{p1} = Axe^{3x}$, pois o termo e^{3x} é parte da solução homogênea associada.
Portanto, $y'_{p1} = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$ e $y''_{p1} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$. Substituindo na EDO, obtemos

$$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 2\left(Ae^{3x} + 3Axe^{3x}\right) - 3Axe^{3x} = e^{3x}.$$

$$4Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$y_{p1} = \frac{xe^{3x}}{4}.$$

A solução particular para $f_2(x) = 3$ pode ser encontrada através da função $y_{p2} = B$.
Portanto, $y'_{p2} = 0$ e $y''_{p2} = 0$. Substituindo na EDO, obtemos

$$0 - 2.0 - 3B = 3.$$

$$B = -1$$

$$y_{p2} = -1$$

A solução particular para EDO não-homogênea com $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ é $y_p(x) = y_{p1} + y_{p2}$. Logo,

$$y_p = \frac{xe^{3x}}{4} - 1.$$

A solução geral da EDO (3) é

$$y(x) = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{xe^{3x}}{4} - 1.$$

Questão 4 (2.5 pontos):
Um determinado material radioativo decai a uma taxa proporcional à quantidade de material presente num determinado tempo. Determine a **meia-vida** T se o material perde um terço da sua massa em 12 dias. A **meia-vida** de uma substância radioativa é o tempo que a substância leva para que sua massa decaia à metade da quantidade original.
Dados: Admita $\ln 2 = 0,69$ e $\ln 3 = 1,09$.

Solução:
Considere $Q = Q(t)$ a quantidade de material presente no instante de tempo t. A equação da desintegração radioativa é modelada pela seguinte equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ,$$

onde k é a constante de proporcionalidade. Seja $Q(0) = Q_0$ a quantidade de massa inicial, sabemos que $Q(12) = \frac{2Q_0}{3}$ e queremos determinar um instante t_0, tal que $Q(t_0) = \frac{Q_0}{2}$.
Separando as variáveis da equação $\frac{dQ}{dt} = -kQ$, obtemos:

$$\frac{1}{Q}dQ = -kdt.$$

Integrando em ambos os lados

$$\int \frac{1}{Q}dQ = \int -kdt.$$

$$ln|Q| = -kt + C, C \in \mathbb{R}$$

$$|Q| = e^{-kt+C}$$

$$|Q| = C_1e^{-kt}, C_1 = e^C$$

$$Q(t) = C_2e^{-kt}, C_2 = \pm C_1.$$

Substituindo a condição inicial $Q(0) = Q_0$, obtemos

$$Q(0) = C_2 = Q_0.$$

Logo, $Q(t) = Q_0e^{-kt}$. Para determinar o valor da constante k, utilizamos a segunda condição inicial.

$$Q(12) = Q_0e^{-12k} = \frac{2Q_0}{3}$$

$$e^{-12k} = \frac{2}{3}$$

$$-12k = ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$k = -\frac{ln2 - ln3}{12} = \frac{0,4}{12} = \frac{4.10^{-1}}{12} = \frac{1}{30}.$$

Dessa forma, $Q(t) = Q_0e^{-\frac{t}{30}}$. Por fim, procuramos o valor de t_0 substituindo as informações obtidas na função $Q(t)$

$$Q(t_0) = Q_0e^{-\frac{t_0}{30}} = \frac{Q_0}{2}$$

$$e^{-\frac{t_0}{30}} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{t_0}{30} = ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t_0 = -30\,(ln1 - ln2) = 20,7.$$

Portanto, o tempo necessário para que o material atinja a meia-vida é de aproximadamente 21 dias.