P1-C2- 2024/02

September 10, 2024

1a Questão (2,5 pontos):

1a Questão (2,5 pontos):
Encontre a curva integral da EDO

$$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$$

que passa pela origem (0, 0).

Solução: Organizando a EDO e separando as variáveis:

$$e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y}(1 - e^{-2x}) \implies ye^y \, dy = (1 - e^{-2x})e^x \, dx$$

Integrando obtemos:

$$\int ye^y \, dy = \int (e^{-x} + e^{-3x}) \, dx$$

Fazendo uma integração por partes, deduzimos que:

$$ye^y - e^y + e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a curva integral que passa pela origem é quando $C = \frac{1}{3}$. Com isso, a solução é:

$$ye^y - e^y + e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x} = \frac{1}{3}.$$

2a Questão (2,5 pontos):
Resolva o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'(x) + 3y(x) = 1 + e^{-2x}$$

com a condição inicial $y(0) = 6$.

Solução: Trata-se de uma equação linear de primeira ordem. Podemos resolvê-la utilizando o fator integrante.

A equação diferencial é da forma:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

onde $p(x) = 3$ e $q(x) = 1 + e^{-2x}$. O fator integrante é dado por:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{3x}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\mu(x)$:

$$e^{3x}y'(x) + 3e^{3x}y(x) = e^{3x}(1 + e^{-2x}),$$

ou seja:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x}y(x)\right) = e^{3x} + e^{x}.$$

Agora, integramos ambos os lados:

$$e^{3x}y(x) = \int e^{3x}\,dx + \int e^{x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + e^{x} + C,$$

onde C é a constante de integração. Logo, a solução geral é:

$$y(x) = \frac{1}{3} + e^{-2x} + Ce^{-3x}.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 6$, temos:

$$6 = \frac{1}{3} + 1 + C \implies C = \frac{14}{3}.$$

Portanto, a solução do PVI é:

$$y(x) = \frac{1}{3} + e^{-2x} + \frac{14}{3}e^{-3x}.$$

Questão 3 (2,5 pontos):
Resolva a equação diferencial:

$$y''(x) + 9y(x) = e^{2x}$$

Solução: Esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea. A solução geral será da forma:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

onde $y_h(x)$ é a solução da equação homogênea associada $y'' + 9y = 0$, e $y_p(x)$ é uma solução particular.

Parte 1: Solução da Equação Homogênea

A equação homogênea é:

$$y'' + 9y = 0.$$

A equação característica associada é:

$$r^2 + 9 = 0 \implies r = \pm 3i.$$

Portanto, a solução geral da equação homogênea é:

$$y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x).$$

Parte 2: Solução Particular

Para encontrar uma solução particular $y_p(x)$, tentamos uma função da forma $y_p(x) = Ae^{2x}$, já que o lado direito da equação é e^{2x}.

Substituindo $y_p(x) = Ae^{2x}$ na equação original $y'' + 9y = e^{2x}$, obtemos:

$$(4Ae^{2x}) + 9(Ae^{2x}) = e^{2x},$$

$$A(4+9)e^{2x} = e^{2x} \implies 13A = 1 \implies A = \frac{1}{13}.$$

Portanto, a solução particular é:

$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{2x}.$$

Parte 3: Solução Geral

A solução geral da equação diferencial é a soma da solução homogênea e da solução particular:

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{13}e^{2x}.$$

Questão 4 (2,5 pontos):
Suponha que temos um material que inicialmente tem 50 mg e, após 2 horas, perde-se 10% da massa inicial. Determine:

(a) Uma expressão para a massa restante em um instante t.

(b) Qual é o tempo necessário para que a massa fique reduzida à metade?

Solução:
(a) Expressão para a massa restante em função do tempo t:
Podemos modelar a perda de massa como um processo de decaimento exponencial, dado pela fórmula:

$$m(t) = m_0 e^{-kt},$$

onde:

- $m(t)$ é a massa restante no instante t,
- $m_0 = 50$ mg é a massa inicial,
- k é a constante de decaimento,
- t é o tempo em horas.

Sabemos que após 2 horas, a massa é reduzida em 10% da massa inicial. Assim, temos:

$$m(2) = 50 \times (1 - 0,1) = 50 \times 0,9 = 45 \text{ mg}.$$

Substituindo na fórmula do decaimento:

$$45 = 50e^{-2k}.$$

Dividindo ambos os lados por 50:

$$0,9 = e^{-2k}.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados:

$$\ln(0,9) = -2k \implies k = -\frac{\ln(0,9)}{2}.$$

Portanto, a expressão para a massa restante no instante t é:

$$m(t) = 50e^{\frac{\ln(0,9)}{2}t}.$$

(b) Tempo necessário para que a massa seja reduzida à metade:
Queremos encontrar o tempo t tal que $m(t) = \frac{50}{2} = 25$ mg. Usamos a fórmula obtida em (a):

$$25 = 50e^{\frac{\ln(0,9)}{2}t}.$$

Dividindo ambos os lados por 50:

$$0,5 = e^{\frac{\ln(0,9)}{2}t}.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados:

$$\ln(0,5) = \frac{\ln(0,9)}{2}t \implies t = \frac{2\ln(0,5)}{\ln(0,9)}.$$

Portanto, o tempo necessário para que a massa seja reduzida à metade é dado por $t = \frac{2\ln(0,5)}{\ln(0,9)}$.