Orientações gerais:

(1) A avaliação tem duração de 2 horas e deve ser realizada sem consulta.

(2) Justifique as suas respostas. Explique todas as etapas do seu argumento.

Questão 1: (2 pontos)

Resolva a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3}$$

Solução:

Trata-se de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem,

$$y' + p(x)y = q(x) \ ,$$

onde $p(x) = 3/x$ e $q(x) = e^x/x^3$. O fator integrante é

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int (3/x)dx} = e^{3\ln|x|} = |x|^3 \ ,$$

lembrando que no cálculo do fator integrante podemos tomar, sem perda de generalidade, a constante de integração como sendo igual a zero. Fazendo a restrição de que $x \neq 0$, devemos tratar separadamente os casos $x > 0$ e $x < 0$. Se $x > 0$, então $\mu(x) = x^3$. Multiplicando ambos os membros da equação pelo fator integrante, obtemos

$$x^3y' + 3x^2y = e^x \ .$$

Se $x < 0$, então $\mu(x) = -x^3$. De modo análogo ao que fizemos no caso anterior, chegamos à mesma expressão acima, pois um fator multiplicativo em ambos os membros não muda a igualdade. Vemos que, pela regra do produto, o membro à esquerda se escreve como a derivada de x^3y, o que nos leva a

$$(x^3y)' = e^x \ .$$

Calculando a integral indefinida de ambos os membros, obtemos

$$x^3y = \int e^x dx = e^x + C \ .$$

Ou seja,

$$y = \frac{e^x}{x^3} + \frac{C}{x^3} \ ,$$

onde $x \neq 0$.

Questão 2: (2 pontos)

a) Ache a equação do plano tangente à superficie $z = x^2 + 3y^2 - x + 3$ no ponto $(1, 1, 6)$.

b) Ache uma parametrização da reta normal a esse plano e que passa pelo ponto $(1, 1, 6)$.

Solução:

Item (a).

Há duas soluções possíveis.

Primeira solução.

Sabemos que a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada por

$$z = ax + by + c$$

onde $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $c = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0$. No caso em questão,

$$a = 2x_0 - 1 \ ,$$

$$b = 6y_0$$

e

$$c = 6 - 2x_0^2 + x_0 - 6y_0^2 \ .$$

Assim, tomando $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, temos $a = 1$, $b = 6$ e $c = -1$. Ou seja, a equação do plano tangente à superficie $z = x^2 + 3y^2 - x + 3$ no ponto $(1, 1, 6)$ é

$$x + 6y - z = 1 \ .$$

Segunda solução: Seja $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 3$. Podemos construir a função

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z \ .$$

A superfície $z = f(x, y)$ é a superfície de nível $g(x, y, z) = 0$. Assim, o vetor

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 - 1, 6y_0, -1)$$

é perpendicular à superfície $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0). Concluímos, portanto, que o plano que buscamos passa pelo ponto $(1, 1, 6)$ e tem vetor normal $\nabla g(1, 1, 6) = (1, 6, -1)$.

O ponto (x, y, z) pertence a esse plano se, e somente se, os vetores $(x-1, y-1, z-6)$ e $(1, 6, -1)$ são perpendiculares. Impondo essa condição, obtemos

$$(x - 1, y - 1, z - 6) \cdot (1, 6, -1) = 0 \ ,$$

ou seja,

$$x + 6y - z = 1 \ .$$

Item (b). A partir da equação do plano, vemos que o vetor normal ao plano é $(1, 6, -1)$. Assim, a reta pode ser parametrizada por

$$r(t) = (1, 1, 6) + t(1, 6, -1) = (1 + t, 1 + 6t, 6 - t) \ .$$

Questão 3: (1 ponto)

Encontre a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(x, y)$ onde $f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Em seguida, calcule $D_{\vec{u}}f(1, 1)$.

Solução:

Primeiro, calculamos as derivadas parciais de f,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x \ .$$

Como f é uma função polinomial, ela tem derivadas parciais contínuas. Portanto, podemos calcular a derivada direcional a partir da igualdade

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} \ ,$$

onde $\vec{u}$ deve ser um vetor unitário. Podemos verificar que $\vec{u}$ já está normalizado,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \ .$$

Assim,

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \left(3x^2 - y, 2y - x\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(3x^2 + x - 3y\right) \ .$$

Substituindo $(x,y) = (1,1)$, obtemos

$$D_{\vec{u}}f(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

Questão 4: (2 pontos)

Determine os máximos locais, os mínimos locais e os pontos de sela de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 3$.

Solução:

Os pontos críticos (x,y) de f satisfazem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Calculando as derivadas parciais, essas igualdades se escrevem na forma $4x^3 - 4y = 0$ e $4y^3 - 4x = 0$. Assim, buscamos os pares (x,y) que satisfazem tanto $y = x^3$ e $x = y^3$. Por meio de uma substituição, temos $x = x^9$, ou seja, $x(x^8 - 1) = 0$. Essa igualdade é satisfeita se, e somente se, $x = 0$ ou se $x^8 - 1 = 0$. Portanto, $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$. Calculando os respectivos valores de y, concluímos que os pontos críticos são $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Para descobrir se são pontos de mínimo local, de máximo local ou de sela, devemos fazer o teste da segunda derivada. Para isso, primeiro calculamos

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 \ ,$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2$$

e

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4 \ .$$

O determinante da matriz Hessiana é

$$\det H = AC - B^2 = 144x^2y^2 - 16 \ .$$

Vamos agora analisar os três casos separamente.

Caso 1: Se $(x,y) = (0,0)$, então $A = 0$, $B = 0$, $C = -4$ e $\det H = -16 < 0$. Logo, f tem um ponto de sela em $(0,0)$.

Caso 2: Se $(x,y) = (1,1)$, então $A = 12 > 0$, $B = 12$, $C = -4$ e $\det H = 128 > 0$. Logo, f tem um ponto de mínimo local em $(1,1)$.

Caso 3: Se $(x,y) = (-1,-1)$, então $A = 12 > 0$, $B = 12$, $C = -4$ e $\det H = 128 > 0$. Logo, f tem um ponto de mínimo local em $(-1,-1)$.

Questão 5: (3 pontos)

Ache o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4y - 6$ na região $x^2 + y^2 \leq 16$.

Solução:

Há duas soluções possíveis.

Primeira solução.

Como f é uma função contínua e o conjunto $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 16 \,\}$ é limitado e fechado, f tem máximo e mínimo globais. Esses extremos podem estar no interior de D ou na fronteira de D. Para isso, vamos separar a solução em três partes.

Parte 1. Comecemos ivestigando o comportamento de f no interior de D. Os pontos críticos (x,y) de f satisfazem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Obtemos $4x = 0$ e $6y - 4 = 0$, ou seja, $x = 0$ e $y = 2/3$. Verificamos que $(0, 2/3) \in D$. Assim, $f(0, 2/3) = -8$ é um candidato a extremo de f.

Parte 2. Vamos agora investigar o comportamento de f na fronteira de D. Temos $x^2 = 16 - y^2$. Substituindo essa expressão na regra de f, podemos definir a função $g : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) = f\left(\sqrt{16 - y^2}, y\right) = 2(16 - y^2) + 3y^2 - 4y - 6 = y^2 - 4y + 26 \ .$$

Impondo $g'(y) = 0$, ou seja, $2y - 4 = 0$, concluímos que g tem um ponto crítico em $y = 2$. Como o gráfico de g é uma parábola com concavidade para cima, g tem o mínimo $g(2) = 22$. Investiguemos agora os valores que g toma na fronteira do seu domínio. Temos $g(-4) = 58$ e $g(4) = 26$. Concluímos que os valores de f na fronteira de D se encontram entre 22 e 58.

Parte 3. Logo, f tem um mínimo global em $(0, 2/3)$ dado por $f(0, 2/3) = -8$ e um máximo global em $(0, -4)$ dado por $f(0, -4) = 58$.

Segunda solução.

Como f é uma função contínua e o conjunto $D = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 16\,\}$ é limitado e fechado, f tem máximo e mínimo globais. Esses extremos podem estar no interior de D ou na fronteira de D. Para isso, vamos separar a solução em três partes.

Parte 1. Comecemos ivestigando o comportamento de f no interior de D. Os pontos críticos (x, y) de f satisfazem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Obtemos $4x = 0$ e $6y - 4 = 0$, ou seja, $x = 0$ e $y = 2/3$. Verificamos que $(0, 2/3) \in D$. Assim, $f(0, 2/3) = -8$ é um candidato a extremo de f.

Parte 2. Vamos agora investigar o comportamento de f na fronteira de D. Para isso, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Os extremos locais da função f dada por $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4y - 6$ sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$ ocorrem nos pontos (x_0, y_0) que satisfazem a igualdade

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

para algum valor de λ. Ou seja,

$$\begin{cases} 4x_0 = 2\lambda x_0 \\ 6y_0 - 4 = 2\lambda y_0 \end{cases}$$

Da primeira igualdade, segue que $(4 - 2\lambda)x_0 = 0$. Temos, portanto, as seguintes possibidades. A primeira possibilidade é $x_0 = 0$. Subtituindo na expressão da restrição, obtemos $g(0, y_0) = 0$, ou seja, $y_0 = \pm 4$. Outra possibilidade é $4 - 2\lambda = 0$, ou seja, $\lambda = 2$. Da segunda igualdade do sistema de equações, obtemos $6y_0 - 4 = 4y_0$, ou seja, $y_0 = 2$. Subtituindo na expressão da restrição, obtemos $g(x_0, 2) = 0$, ou seja, $x_0 = \pm 2\sqrt{3}$. Assim, temos quatro candidatos a extremos de f que satisfazem a restrição, a saber, $f(0, -4) = 58$, $f(0, 4) = 26$, $f(2\sqrt{3}, 2) = 22$ e $f(-2\sqrt{3}, 2) = 22$. Concluímos que os valores de f na fronteira de D se encontram entre 22 e 58.

Parte 3. Logo, f tem um mínimo global em $(0, 2/3)$ dado por $f(0, 2/3) = -8$ e um máximo global em $(0, -4)$ dado por $f(0, -4) = 58$.

Comentário sobre ambas as soluções: Note que, na parte 1, não era necessário investigar se $(0, 2/3)$ é ponto de mínimo local, de máximo local ou de sela, pois isso será concluído ao final, ao verificarmos que a função não toma valores menores que -8 em nenhum outro ponto de D além do ponto $(0, 2/3)$. De todo modo, é possível verificar que $(0, 2/3)$ é ponto de mínimo local. Para isso, calculamos $A = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 2/3) = 6 > 0$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 2/3) = 4$ e $C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 2/3) = 0$. O determinante da matriz Hessiana é $\det H = AC - B^2 = 24 > 0$. Logo, pelo teste da segunda derivada, concluímos que f tem um mínimo local dado por $f(0, 2/3) = -8$.