Orientações gerais:

(1) A avaliação tem duração de 2 horas e deve ser realizada sem consulta.

(2) Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Só serão aceitas respostas justificadas.

Questão 1: (2,5 pontos)

Dada a equação

$$y'' - 7y' + 10y = -6e^{2t}$$

(a) (1,0 ponto) Determine a solução geral da equação homogênea associada

(b) (1,5 pontos) Determine a solução da equação que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$.

Solução:

(a) Equação Homogênea:

$r^2 - 7r + 10 = 0$ implica $r = 2, 5$ então a solução é $y_c = A_1e^{2t} + A_2e^{5t}$.

(b) Para a solução particular temos $y_p = Ate^{2t}$. As derivadas são

$y'_p = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$ e $y''_p = 4Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$. Substituindo essas derivadas na equação dada, temos $A = 2$.

As condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 4$ implicam que $A_1 + A_2 = 0$ e $2A_1 + 5A_2 + 2 = 4$. Assim, temos que $A_1 = \frac{2}{3}$ e $A_2 = -\frac{2}{3}$.

Questão 2: (2,5 pontos)

Considere as superficies

$S_1 = \{(x, y, z) \mid 2x^2 + y^2 - z^2 = 2\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 4\}$

(a) (1,0 ponto) Determine a equação do plano tangente à superficie S_1 em $(1, 1, 1)$.

(b) (1,5 pontos) Determine a equação paramétrica da reta tangente à curva $C = S_1 \cap S_2$ de interseção das superficies S_1 e S_2 em $(1, 1, 1)$.

Solução:

(a) O plano tangente a superficie $f(x, y, z) = k$ no ponto (x_0, y_0, z_0) é dado pela equação:

$$f_x(x_0, y_0, z_o)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_o)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_o)(z - z_0) = 0$$

Temos $f_x = 4x$, $f_y = 2y$ e $f_z = -2z$. Assim, no ponto $(1, 1, 1)$ a equação é:

$$4(x - 1) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$$

(b) A reta tangente no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e paralela ao vetor $\vec{v} =< v_1, v_2, v_3 >$ é dada pela equação:

$$(x_0, y_0, z_0) + t < v_1, v_2, v_3 >$$

.

O ponto P_0 é $(1, 1, 1)$ e o vetor $\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$ onde $\vec{n_1} = \nabla f_1(1, 1, 1)$ e $\vec{n_2} = \nabla f_2(1, 1, 1)$.

Temos que $\vec{n_1} =< 4, 2, -2 >$ e $\vec{n_2} =< 2, 2, 4 >$. Então $\vec{v} =< 12, 20, 4 >$ e a equação da reta é dada por:

$$(1, 1, 1) + t < 12, 20, 4 >$$

Questão 3: (2 pontos)

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1$ e o ponto $P = (4, 9)$

(a) (1,0 ponto) Dê a direção unitária do $\vec{u}$ de maior crescimento em $(4, 9)$

(b) (1,0 ponto) Determine a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(4, 9)$ de f em $(4, 9)$ na direção $\vec{u}$ encontrada no item (a).

Solução:

(a) A direção do maior crescimento é dado pelo vetor $\vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

O gradiente $\nabla f =< f_x, f_y >=< \frac{2x}{4}, -\frac{2y}{9} >$. $\nabla f(4, 9) =< 2, -2 >$. Assim $| \nabla f | = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Então $\vec{u} =< \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} >$.

(b) A derivada direcional $D_{\vec{u}}f = \nabla f.\vec{u} =< 2, -2 >=< \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} >= 2\sqrt{2}$

Questão 4: (3 pontos)

Seja $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 9x$ definida em $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4$

(a) (1,5 pontos) Determine e classifique os pontos críticos de f em D

(b) (1,5 pontos) Determine os valores de máximo e mínimo absolutos de f em D e os pontos onde ocorrem esses valores.

Solução:

(a) Para determinar os pontos críticos temos que achar os pontos (x, y) onde $\nabla f = 0$. Temos,

$f_x = 3x^2 + y^2 - 9 = 0$ e $f_y = 2xy = 0$.

$2xy = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$.

$x = 0 \Rightarrow y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \pm 3.$

$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \pm\sqrt{3}.$

O Hessiano $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12x^2 - 4y^2.$

Como $D(0, \pm 3) < 0$ e $f_{xx}(0, \pm 3) < 0$ temos que $(0, \pm 3)$ é ponto de sela.

Como $D(\sqrt{3}, 0) > 0$ e $f_{xx}(\sqrt{3}, 0) > 0$ temos que $(\sqrt{3}, 0)$ é ponto de mínimo.

Como $D(-\sqrt{3}, 0) > 0$ e $f_{xx}(\sqrt{3}, 0) < 0$ temos que $(-\sqrt{3}, 0)$ é ponto de máximo.

(b) Para achar os pontos de máximo e mínimo temos que usar o mêtodo de multiplicadores de Lagrange. Assim, temos que resolver o sistema de equações:

$$3x + y^2 - 9 = \lambda(2x)$$

$$2xy = 2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Se $y \neq 0 \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow x^2 + y^2 - 9 = 0$ que é impossível dada a restrição $x^2 + y^2 = 4$.

Se $y = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$

$f(2, 0) = -10$ é o mínimo absoluto e $f(-2, 0) = 10$ é máximo absoluto.