Avisos: **(1)** Celulares desligados; **(2)** a prova tem duração de duas horas; **(3)** todas as respostas precisam ser justificadas.

Questão 1: (2.5 pontos)

Ache a solução $y(t)$ da equação

$$(t^2+1)y' + 2ty - 5 = 0,$$

onde $y(0) = 3$.

Solução:

É possível verificar imediatamente que

$$(t^2+1)y' + 2ty = [(t^2+1)y]'.$$

Contudo, podemos reduzir à aplicação de fatores integrantes. Primeiramente, re-escrevemos em formato padrão:

$$y' + \frac{2t}{t^2+1}y = \frac{5}{t^2+1}.$$

Em seguida multiplicamos pelo fator integrante $m(t)$:

$$m(t) = e^{\int 2t/(t^2+1)\,dt}.$$

Mas

$$\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \ln(t^2+1) + C,$$

onde a integral indefinida é calculada usando a substituição $u = t^2+1$. Logo,

$$m(t) = t^2+1,$$

e, multiplicando a EDO em formato padrão por $m(t)$, somos levados a

$$(t^2+1)y' + 2ty = [(t^2+1)y]' = 5.$$

Segue que

$$(t^2+1)y(t) = 5t + D.$$

A condição inicial $y(0) = 3$ fornece o valor de D:

$$(0^2+1)y(0) = 5 \cdot 0 + D \Longrightarrow D = 3.$$

A solução é, portanto,

$$\boxed{y(t) = \frac{5t+3}{t^2+1}}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $\mathcal{C}$ a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine uma parametrização da reta r tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $P = (-1, 0, \pi)$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução:

A reta r tem que passar pelo ponto $P = (-1, 0, \pi)$ e seu vetor diretor é o vetor tangente a $\mathcal{C}$ neste ponto.

É preciso determinar o valor do parâmetro t_* de modo que $P = (-1, 0, \pi) = \gamma(t_*)$. Temos:

$$(-1, 0, \pi) = \gamma(t_*) = (\cos t_*, \operatorname{sen} t_*, t_*) \Longrightarrow t_* = \pi.$$

O vetor tangente a $\mathcal{C}$ em P é $\gamma'(t_*)$:

$$\gamma'(t_*) = (-\operatorname{sen} t_*, \cos t_*, 1) = (0, -1, 1),$$

pois $t_* = \pi$.

Concluímos que

$$r(t) = (-1, 0, \pi) + t(0, -1, 1),$$

ou seja,

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = -1 \\ y(t) = -t \\ z(t) = \pi + t \end{array}}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a superfície $\mathcal{S}$ descrita pela equação

$$\mathcal{S} : \; 2x^2 - 3y^2 - 5z = 4.$$

Seja π o plano tangente a essa superfície no ponto $(1, 1, -1)$.

Ache o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ que é a interseção do plano π com o eixo y.

Solução:

A superfície $\mathcal{S}$ é superfície de nível (4) da função

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 - 5z.$$

Portanto $\nabla f(x, y, z)$ é ortogonal a $\mathcal{S}$ em todo ponto $(x, y, z) \in \mathcal{S}$. O ponto $(1, 1, -1)$ está em $\mathcal{S}$ pois:

$$2 \cdot (1)^2 - 3 \cdot (1)^2 - 5 \cdot (-1) = 2 - 3 + 5 = 4.$$

Temos:

$$\nabla f(x, y, z) = (4x, -6y, -5).$$

Logo

$$(4 \cdot 1, -6 \cdot 1, -5) = (4, -6, -5)$$

é ortogonal a $\mathcal{S}$ em $(1, 1, -1)$ e podemos usá-lo como vetor normal a π.

Portanto o plano tangente a $\mathcal{S}$ nesse ponto tem equação:

$$\pi : \; 4x - 6y - 5z + d = 0.$$

Como $(1, 1, -1) \in \pi$ temos

$$4 \cdot (1) - 6 \cdot (1) - 5 \cdot (-1) + d = 0 \Longrightarrow d = -3.$$

Concluímos que

$$\pi : 4x - 6y - 5z - 3 = 0.$$

A interseção de π com o eixo y é encontrada tomando $x = 0 = z$:

$$4 \cdot 0 - 6y - 5 \cdot 0 - 3 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\boxed{P_0 = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja

$$f(x, y) = 10x^2 + 30xy + 25y^2 + 8y^5.$$

(a) Ache todos os pontos críticos de f.

(b) Classifique, quando possível, estes pontos críticos em máximo local, mínimo local, ponto de sela.

Solução:

(a) Os pontos críticos de f correspondem aos pontos onde $\nabla f = (0, 0)$, uma vez que f é uma função polinomial, logo de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Calculemos o gradiente de f:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (20x + 30y, 30x + 50y + 40y^4).$$

Então

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow 20x + 30y = 0 \text{ e também } 30x + 50y + 40y^4 = 0.$$

Ou seja,

$$20x = -30y \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}y,$$

e portanto

$$30 \cdot \left(-\frac{3}{2}y\right) + 50y = 40y^4 = 0.$$

Expandindo, temos:

$$-45y + 50y + 40y^4 = 0 \Longrightarrow 5y + 40y^4 = 0 \Longrightarrow 5y(1 + 8y^3) = 0.$$

Logo, ou

$$y = 0 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}y = 0,$$

ou

$$1 + 8y^3 = 0 \Longrightarrow y^3 = -\frac{1}{8} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Neste caso

$$x = -\frac{3}{2}y \Longrightarrow x = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Em conclusão, há dois pontos críticos:

$$\boxed{(0,0) \text{ e } \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)}.$$

(b) Para fazer a classificação destes pontos críticos é preciso calcular a matriz Hessiana de f em cada ponto crítico. Num ponto (x, y) temos:

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 50 + 160y^3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, em $(0, 0)$ temos:

$$\text{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 50 \end{bmatrix}.$$

Logo, o determinante de $\text{Hess} f(0, 0)$ é

$$D = \det \text{Hess} f(0,0) = 20 \cdot 50 - 30 \cdot 30 = 1000 - 900 = 100 > 0.$$

Ainda,

$$f_{xx}(0,0) = 20 > 0.$$

Portanto, pelo Teste da 2ª derivada,

$$\boxed{(0,0) \text{ é ponto de mínimo local}}.$$

No segundo ponto fixo, $(3/4, -1/2)$ temos:

$$\text{Hess} f\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 50 + 160 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 50 - \frac{160}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 30 \end{bmatrix}.$$

Logo, o determinante de $\text{Hess} f(3/4, -1/2)$ é

$$D = \det \text{Hess} f\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) = 20 \cdot 30 - 30 \cdot 30 = 600 - 900 = -300 < 0.$$

Donde, pelo Teste da 2ª derivada,

$$\boxed{\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) \text{ é ponto de sela}}.$$