Instituto de Matemática - IM/UFRJ
MAC128 – Cálculo Diferencial e Integral 2 – 2024.1
Gabarito da prova final – Turma n° 13892 (10h) −05/07/2024

Orientações gerais:

(1) A avaliação tem duração de 2 horas e deve ser realizada sem consulta.

(2) Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Só serão aceitas respostas justificadas.

Questão 1: (2,0 pontos)

Resolva a equação diferencial ordinária $y' + 2xy = x$ com o valor inicial $y(0) = 1$.

Solução:

Há duas soluções possíveis.

Por separação de variáveis: A equação é separável, $y' = -2x\left(y - \frac{1}{2}\right)$. Assim,

$$\int \frac{dy}{y - \frac{1}{2}} = -2\int x\,dx\,,$$

que nos leva a

$$\ln\left(y - \frac{1}{2}\right) = -x^2 + C\ .$$

Exponenciando os dois membros e definindo $A = e^C$, obtemos

$$y = Ae^{-x^2} + \frac{1}{2}\ .$$

A constante A fica determinada pelo valor inicial, $1 = Ae^0 + \frac{1}{2}$, ou seja, $A = \frac{1}{2}$. Ou seja, a solução é

$$y = \frac{1 + e^{-x^2}}{2}\ .$$

Pelo método do fator integrante: Multiplicando ambos os membros da EDO pelo fator integrante $\mu(x) = e^{x^2}$, obtemos

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$

Utilizando a regra da cadeia, identificamos o membro a esquerda como sendo uma derivada,

$$\left(e^{x^2}y\right)' = xe^{x^2}$$

e, portanto,

$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}dx\ .$$

Definindo $u = x^2$, temos $xdx = du/2$. Assim,

$$e^{x^2}y = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C\,.$$

Multiplicando o primeiro e o último membros por e^{-x^2}, obtemos

$$y = Ce^{-x^2} - \frac{1}{2}$$

A constante C fica determinada pelo valor inicial, $1 = Ce^0 + \frac{1}{2}$, ou seja, $C = \frac{1}{2}$. Ou seja, a solução é

$$y = \frac{1 + e^{-x^2}}{2}\ .$$

Questão 2: (2,0 pontos)

Encontre a solução geral da equação diferencial ordinária $y'' + 9y = 10\cos(2x)$.

Solução:

Comecemos analisando o caso homogêneo. Temos $a = 1$, $b = 0$ e $c = 9$. A equação característica $r^2 + 9 = 0$ não tem soluções reais. Assim, estamos no caso 3, sendo a solução dada por

$$y_h = C_1 e^{pt}\,\mathrm{sen}(qt) + C_2 e^{pt}\cos(qt)\ ,$$

onde $p = -b/2a = 0$ e $q = \sqrt{4ac - b^2}/2a = 3$. Assim, a solução da EDO homogênea é

$$y_h = C_1\,\mathrm{sen}(3t) + C_2\cos(3t)\ .$$

Para encontrarmos a solução particular, fazemos um chute na forma

$$y_p = C_3\cos(2t)\ ,$$

que, substituindo na EDO não homogênea, nos leva a

$$-4C_3\cos(2t) + 9C_3\cos(2t) = 10\cos(2t)\ ,$$

portanto, $C_3 = 2$ e $y_p = 2\cos(2t)$. A solução geral é dada por $y = y_h + y_p$, ou seja,

$$y = C_1\,\mathrm{sen}(3t) + C_2\cos(3t) + 2\cos(2t)\ .$$

Questão 3: (4,0 pontos)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) (1,0 ponto) Mostre que f não é contínua.

(b) (1,0 ponto) Calcule $\nabla f(2,2)$.

(c) (1,0 ponto) Mostre que a equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(2,2,1/2)$ é $x - y - 4z = -2$.

(d) (0,5 ponto) Parametrize a reta que é perpendicular a esse plano e que passa pelo ponto $(0,0,14)$.

(e) (0,5 ponto) Encontre o ponto de interseção entre o plano e a reta obtidos nos itens (c) e (d).

Solução:

(a) A função f é contínua se, e somente se, para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, temos que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe e é igual ao valor que f toma em (x_0, y_0), ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \ .$$

Para mostrar que a função f não é contínua, basta encontarmos um ponto (x_0, y_0) para o qual a igualdade acima não seja verdadeira. Vamos investigar o caso em que $(x_0, y_0) = (0,0)$. A partir da regra da função, temos $f(0,0) = 1$. Portanto, f será contínua em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \ .$$

Vejamos se isso é verdade. Comecemos analisando se o limite existe. Para isso, vamos considerar dois caminhos.

Caminho 1: Vamos nos aproximar do ponto $(0,0)$ pela reta sobre o eixo x, ou seja, pela reta $y = 0$. Assim, $(x,y) = (x,0)$ e o limite se escreve, ao longo desse caminho, na forma

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \ .$$

Caminho 2: Vamos nos aproximar do ponto $(0,0)$ pela reta sobre o eixo y, ou seja, pela reta $x = 0$. Assim, $(x,y) = (0,y)$ e o limite se escreve, ao longo desse caminho, na forma

$$\lim_{x\to 0} f(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \ .$$

Como obtivemos valores diferentes para caminhos diferentes, o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

não existe e, portanto, a função não é contínua. (Respostas mais breves serão aceitas.)

(b) Calculemos as derivadas parciais. Pela regra do quociente,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - 2x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \ .$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{4}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{4}$. Logo, $\nabla f(2,3) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

(c) A equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ é

$$z = ax + by + c$$

onde $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ e $c = f(x_0,y_0) - ax_0 - by_0$. Assim, tomando $x_0 = 2$ e $y_0 = 2$, temos $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ e $c = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$z = \frac{x}{4} - \frac{y}{4} + \frac{1}{2} \ ,$$

ou seja,

$$x - y - 4z = -2 \ .$$

(d) O vetor $(1, -1, -4)$ é normal ao plano. Assim, podemos construir uma reta parametrizada que parte do ponto $(0, 0, 14)$ e que tem $(1, -1, -4)$ como vetor diretor. Assim,

$$r(t) = (0, 0, 14) + t(1, -1, -4) = (t, -t, 14 - 4t) \ .$$

(d) Vamos impor que o ponto $(t, -t, 14 - 4t)$ esteja no plano,

$$-2 = -t - (-t) - 4(14 - 4t) = -56 + 18t \ ,$$

ou seja, $t = 54/18 = 3$. Ou seja, o ponto que buscamos é $r(3) = (3, -3, 2)$.

Questão 4: (2,0 pontos)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y(1 + x^2)$. Seja $\hat{u} = (-\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.

(a) (1,0 ponto) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(2, 3)$.

(b) (1,0 ponto) Represente no plano xy o ponto $(2, 3)$; o gradiente de f no ponto $(2, 3)$; o vetor unitário $\hat{u}$ a partir do ponto $(2, 3)$; e a curva de nível de f que passa pelo ponto $(2, 3)$.

Solução:

(a) Calculemos as derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + x^2$. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 12$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 5$. Logo, $\nabla f(2, 3) = (12, 5)$. Como f é um polinômio, as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas. Portanto, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(2, 3) = \nabla f(2, 3) \cdot \hat{u} = (12, 5) \cdot \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right) = -\frac{60}{13} + \frac{60}{13} = 0 \ .$$

(b) A curva de nível é dada por $y(1 + x^2) = f(2, 3) = 15$, ou seja, $y = \frac{15}{1+x^2}$. O gradiente de f no ponto $(2, 3)$ é o vetor $(12, 5)$, o qual é perpendicular à curva de nível no ponto $(2, 3)$. O resultado do item (a) nos mostra que $\hat{u}$ é um vetor sobre reta tangente à curva de nível no ponto $(2, 3)$. A partir dessas informações, podemos fazer o seguinte esboço.

INSERIR ESBOÇO