Avisos: **(1)** Celulares desligados **(2)** 2 horas de prova **(3)** Só terão validade as soluções justificadas **(4)** Pontuação máxima: 10 pontos

Questão 1. *(0,5 pt) Verifique que o limite abaixo não existe:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Justifique sua resposta.

Solução:

Se $y = 0$ então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

Se $x = 0$ então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$.

Portanto o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Questão 2. *Sejam a superfície $S_0 = \{(x, y, z); 9x^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36\}$ e o ponto $P_0 = (2, 3, 1) \in S_0$.*

(a) (0,5 pt) Determine e classifique $S_0 \cap \Pi_{xy}$, onde Π_{xy} e o plano xy.

Solução:

O plano xy quer dizer $z = 0$. Então $S \cap \prod_{xy}$ é a curva $9x^2 + 4y^2 = 36$ que é uma elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

(b) (1 pt) Determine a equação do plano tangente à superfície S_0 em P_0.

Solução:

Observe que S_0 é a superfície de nível 36 da função $F(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 - 36z^2$. Portanto, o vetor normal a S_0 em P_0 é $\overrightarrow{N}$ é dado pelo vetor gradiente de F em P_0, isto é, $\overrightarrow{N} = \nabla F(P_0) = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$. Como $F_x(x, y, z) = 18x$, $F_y = 8y$ e $F_z = -72z$, obtemos

$$\nabla F(P_0) = \nabla F(2, 3, 1) = (36, 24, -72).$$

Assim, a equação do plano tangente a S_0 no ponto P_0 é:

$$\nabla F(2, 3, 1) \cdot (x - 2, y - 3, z - 1) = 0 \Rightarrow 36(x - 2) + 24(y - 3) - 72(z - 7) = 0$$

Portanto a equação do plano é:

$$36x + 24y - 72z + 360 = 0.$$

(c) *(1 pt) Determine a equação paramétrica da reta normal a S_0 em P_0.*

Solução:

A equação paramétrica da reta L normal é dada por:

$$L(t) = P_0 + t.\nabla F(P_0) \Longrightarrow (2,3,1) + t(36,24,-72) \Longrightarrow L(t) : \begin{cases} x(t) = 2 + 36t \\ y(t) = 3 + 24t \quad\quad t \in \mathbb{R} \\ z(t) = 1 - 72t. \end{cases}$$

(d) *(1 pt) Sejam $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = 9x^2 + 4y^2 + 36z^2$ e $\gamma(t), t \in \mathbb{R}$, uma curva tal que $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma'(0) = (1,1,1)$. Calcule $(g \circ \gamma)'(0)$.*

Solução:

Usando a regra da cadeia, para qualquer t temos que

$$(g \circ \gamma)'(t) = g_x(x,y,z).dx/dt + g_y(x,y,z).dy/dt + g_z(x,y,z).dz/dt = \nabla g(\gamma(t)).\gamma'(t).$$

Então

$$(g \circ \gamma)'(0) = \nabla g(\gamma(0)).\gamma'(0) = (36,24,72).(1,1,1) = 132.$$

Questão 3. *Sejam $f(x,y) = \sin(xy) + e^x y^2$ e $P_0 = (0, \pi/2)$.*

(a) *(1 pt) Determine a derivada direcional $D_{\overrightarrow{u}} f(P_0)$ de f em P_0 na direção de $\overrightarrow{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.*

Solução:

$D_{\overrightarrow{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0).\overrightarrow{u}$

$f_x = ycos(xy) + e^x y^2$ e $f_y = xcos(xy) + 2ye^x$.

$\nabla f(0, \pi/2) =< \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}, \pi >$

$D_{\overrightarrow{u}} f(P_0) =< \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}, \pi > . < \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} >= \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4})$.

(b) *(1 pt) Determine o vetor unitário $\overrightarrow{u}_{max}$ que dá a direção de taxa de variação máxima de f em P_0 e determine essa taxa máxima.*

Solução:

A direção da variação máxima de f em P_0 é dada pelo vetor $\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}$, onde $\nabla f(P_0)$ é o gradiente de f em P_0.

Temos: $\nabla f(0, \pi/2) =< \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}, \pi >$ e $\|\nabla f\| = \sqrt{\pi^2/4 + \pi^2 + \pi^4/16} = \pi\sqrt{5/4 + \pi^2/16}$.

Portanto, a direção da variação máxima de f em P_0 é dada por

$$(\pi\sqrt{5/4+\pi^2/16}). < \frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}, \pi > .$$

(c) *(1 pt) Seja $G(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Assuma que*

$$(x(0,0), y(0,0)) = P_0, \quad \frac{\partial x}{\partial u}(0,0) = 5, \quad \frac{\partial x}{\partial v}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial u}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v}(0,0) = 1.$$

Calcule $\frac{\partial G}{\partial u}(0,0)$ e $\frac{\partial G}{\partial v}(0,0)$.

Solução:

Usando a regra da cadeia, temos

$$G_u(u,v) = f_x(x(u,v), y(u,v))x_u(u,v) + f_y(x(u,v), y(u,v))y_u(u,v).$$

Assim, com $(u,v) = (0,0)$ temos:

$$G_u(0,0) = f_x(0,\pi/2)x_u(0,0) + f_y(0,\pi/2)y_u(0,0) = (\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}).5$$

Usando a regra da cadeia, temos

$$G_v(u,v) = f_x(x(u,v), y(u,v))x_v(u,v) + f_y(x(u,v), y(u,v))y_v(u,v)$$

Assim, com $(u,v) = (0,0)$ temos:

$$G_v(0,0) = f_x(0,\pi/2)x_v(0,0) + f_y(0,\pi/2)y_v(0,0) = (\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4})2 + (\pi).1$$

Questão 4. *Seja $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ definida em $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

(a) *(1 pt) Determine e classifique os pontos críticos de f em $\{x^2 + y^2 < 1\}$.*

Solução:

Para achar pontos críticos precisamos resolver $\nabla f = 0$. Como $f_x = 4x = 0$ e $f_y = 2y = 0$, temos que o único ponto crítico é $(0,0)$.

Também temos que $f_{xx} = 4, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2$.

Usando o teste da segunda derivada vemos que $D = 8 > 0$ e $f_{xx} = 4 > 0$. Então $(0,0)$ é o ponto de mínimo local com valor mínimo $f(0,0) = 0$.

(b) *(1 pt) Determine o valor Máximo e o valor mínimo de f na fronteira $\partial D = \{x^2 + y^2 = 1\}$ e os pontos onde ocorrem esses valores.*

Solução:

Usando $\nabla f = \lambda \nabla g$ *e* $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$, *temos* $4x = \lambda(2x)$, $2y = \lambda(2y)$. *Isso dá os pontos* $(0, \pm 1)$ *e* $(\pm 1, 0)$.

Temos, $f(\pm 1, 0) = 2$ *e* $f(0, \pm 1) = 1$.

(c) *(1 pt) Determine o valor Máximo e o valor mínimo de* f *em seu domínio* D *e os pontos onde esses valores ocorrem.*

Solução:

Valor mínimo absoluto é $f(0,0) = 0$ *e*

Valor Máximo absoluto é $f(\pm 1, 0) = 2$.

Boa Sorte!