Avisos: **(1)** Celulares desligados; **(2)** a prova tem duração de duas horas; **(3)** todas as respostas precisam ser justificadas.

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a função

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq 0, \\ \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Justifique o fato desta função ser contínua em $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Esta função é contínua em $(x,y) \neq (0,0)$ pois é uma função racional (quociente de polinômios, que são funções de classe $\mathcal{C}^\infty$) em que o denominador não se anula.

Para verificar que a função é contínua em $(0,0)$ é preciso justificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

De fato, temos

$$-|y| \leq \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \leq |y|,$$

uma vez que

$$-1 \leq \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1. \tag{1}$$

Para verificar que vale (1) notemos que $2xy \leq x^2+y^2$, pois

$$-x^2 - y^2 + 2xy = -(x-y)^2 \leq 0,$$

e também que $-(x^2+y^2) \leq 2xy$, pois

$$-x^2 - y^2 - 2xy = -(x+y)^2 \leq 0.$$

Logo, multiplicando (1) por y, se $y \geq 0$, obtemos que

$$-|y| = -y \leq \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \leq y = |y|.$$

Por outro lado, multiplicando (1) por $-y$, se $y < 0$, obtemos que

$$-|y| = y \leq \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \leq -y = |y|.$$

Portanto, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0,$$

segue do Teorema do Sanduiche (também conhecido como Teorema do Confronto) que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0,$$

como desejávamos.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $\mathcal{S}$ a esfera de centro em $(0,0,0)$ e raio 1. Seja $\mathcal{C}$ uma curva inteiramente contida na superfície $\mathcal{S}$ e parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Explique porque é correto afirmar que, se $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, então $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solução:

A superfície $\mathcal{S}$ é a esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 1, logo pode ser descrita pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Da feita que a curva $\mathcal{C}$ está contida na esfera segue que

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 = 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O lado esquerdo da equação acima é exatamente $(f \circ \gamma)(t)$. Logo

$$(f \circ \gamma)(t) = 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Segue que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

pois trata-se da derivada de uma função constante.

Outra explicação é que a esfera $\mathcal{S}$ é uma *superfície de nível* da função f, logo o gradiente de f é ortogonal a $\mathcal{S}$ em cada ponto de $\mathcal{S}$. Isto é, ∇f é ortogonal ao plano tangente em cada ponto de $\mathcal{S}$. Como a curva $\mathcal{C}$ está contida em $\mathcal{S}$, seu vetor tangente, num ponto da curva, é paralelo ao plano tangente a $\mathcal{S}$ naquele ponto. Portanto o vetor tangente à curva $\mathcal{C}$ num ponto da curva será ortogonal a ∇f naquele ponto. Ou seja,

$$0 = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = [\nabla f(x(t), y(t), z(t))] \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) = 0.$$

Pela Regra da Cadeia a expressão à esquerda acima é exatamente $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Um morro tem a forma do gráfico de $z = f(x,y) = 560 - x^2 - y^2$. Um esquiador deseja descer este morro a partir do ponto $(6, 2, 520)$. Qual a direção e sentido que deverá seguir para descer de forma mais íngreme possível?

Solução:

A direção e sentido de máximo *crescimento* de f em (x,y) é a do gradiente de f, normalizado para ter tamanho 1:

$$\frac{1}{\|\nabla f(x,y)\|} \cdot \nabla f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (-2x, -2y).$$

A questão pede a direção e sentido de máximo *decrescimento* de f em $(6,2)$. A direção é a mesma do máximo crescimento mas o sentido é oposto. É, portanto, dada por

$$\frac{1}{\|\nabla f(6,2)\|} \cdot [-\nabla f(6,2)] = \frac{1}{2\sqrt{6^2+2^2}} \cdot (12,4).$$

Simplificando a expressão acima, a resposta é

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3,1).}$$

Questão 4: (2.5 pontos)

(a) (1.0 pontos) Faça o esboço do domínio $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -3 \leq x+y \leq 3\,,\ -3 \leq x-y \leq 3\}$.

(b) (1.5 pontos) Verifique que os valores máximo e mínimo absolutos da função $z = f(x,y) = x^2+2y^2$ no domínio $\mathcal{D}$ são, respectivamente, 6 e 0. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para a análise na fronteira de $\mathcal{D}$. Determine todos os pontos em $\mathcal{D}$ onde estes valores máximo e mínimo absolutos são assumidos.

Solução:

(a) O domínio $\mathcal{D}$ corresponde a um quadrado de vértices $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,3)$ e $(0,-3)$, no plano xy.

(b) O domínio $\mathcal{D}$ é fechado e limitado, logo a função f, que é um polinômio e portanto de classe $\mathcal{C}^\infty$, assume seus valores extremos em $\mathcal{D}$.

No interior de $\mathcal{D}$ os candidatos são os pontos críticos de f: pontos onde f não é diferenciável – não existe tais pontos – ou pontos onde ∇f se anula. Procuremos pontos no interior de $\mathcal{D}$ onde o gradiente de f se anula:

$$\nabla f(x,y) = (2x, 4y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0).$$

Portanto separamos o candidato $(0,0)$.

Em seguida, observamos que a fronteira de $\mathcal{D}$ é composta de quatro segmentos de reta, a saber,

- $\mathcal{R}_1$: $x+y=3$,
- $\mathcal{R}_2$: $x+y=-3$,
- $\mathcal{R}_3$: $x-y=3$,
- $\mathcal{R}_4$: $x-y=-3$.

Em cada segmento temos que $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$.

De acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, se (a, b) for ponto de máximo ou mínimo de f sujeito a uma restrição diferenciável $g(x, y) = 0$ então $\nabla f(a, b)$ deve ser paralelo a $\nabla g(a, b)$, e (a, b) deve satisfazer a restrição $g = 0$.

Façamos a análise em cada segmento. Notemos que $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$.

Em $\mathcal{R}_1$ a restrição é $g_1(x, y) = x + y - 3 = 0$ e $\nabla g_1(x, y) = (1, 1)$. Logo, se (a, b) for ponto de máximo ou mínimo de f em $\mathcal{R}_1$, devemos ter

$$(2a, 4b) = \lambda(1, 1),$$

isto é,

$$\left\{ 2a = \lambda 4b = \lambda. \right.$$

Segue que $2a = 4b$, ou seja $a = 2b$. Mas $(a, b) \in \mathcal{R}_1$, logo $a + b - 3 = 0$. Portanto $2b + b - 3 = 0$, logo $b = 1$. Donde $a = 2$. Então em $\mathcal{R}_1$ temos o candidato $(2, 1)$.

Em $\mathcal{R}_2$ a restrição é $g_2(x, y) = x + y + 3 = 0$ e $\nabla g_2(x, y) = (1, 1)$, como para ∇g_1. Logo, se (a, b) for ponto de máximo ou mínimo de f em $\mathcal{R}_2$ devemos ter $a = 2b$. Mas $(a, b) \in \mathcal{R}_2$, logo $a + b + 3 = 0$. Portanto $2b + b + 3 = 0$, logo $b = -1$. Donde $a = -2$. Então em $\mathcal{R}_2$ temos o candidato $(-2, -1)$.

Em $\mathcal{R}_3$ a restrição é $g_3(x, y) = x - y - 3 = 0$ e $\nabla g_3(x, y) = (1, -1)$. Logo, se (a, b) for ponto de máximo ou mínimo de f em $\mathcal{R}_3$ devemos ter

$$(2a, 4b) = \lambda(1, -1),$$

isto é,

$$\left\{ 2a = \lambda 4b = -\lambda. \right.$$

Segue que $2a = -4b$, ou seja $a = -2b$. Mas $(a, b) \in \mathcal{R}_3$, logo $a - b - 3 = 0$. Portanto $-2b - b - 3 = 0$, logo $b = -1$. Donde $a = 2$. Então em $\mathcal{R}_3$ temos o candidato $(2, -1)$.

Em $\mathcal{R}_4$ a restrição é $g_4(x, y) = x - y + 3 = 0$ e $\nabla g_4(x, y) = (1, -1)$, como para ∇g_3. Logo, se (a, b) for ponto de máximo ou mínimo de f em $\mathcal{R}_4$ devemos ter $a = -2b$. Mas $(a, b) \in \mathcal{R}_4$, logo $a - b + 3 = 0$. Portanto $-2b - b + 3 = 0$, logo $b = 1$. Donde $a = -2$. Então em $\mathcal{R}_4$ temos o candidato $(-2, 1)$.

Por fim, precisamos tratar os *vértices* do quadrado de modo diferente, pois a fronteira de $\mathcal{D}$ não é uma curva diferenciável nestes pontos. Adicionamos, então, os candidatos:

$$(-3, 0),\ (3, 0),\ (0, -3),\ (0, 3).$$

Avaliemos f em cada um dos nove candidatos:

$$\mathbf{f(0, 0) = 0^2 + 2(0)^2 = 0},$$

$$f(2, 1) = (2)^2 + 2(1)^2 = 6,$$
$$f(-2, -1) = (-2)^2 + 2(-1)^2 = 6,$$
$$f(2, -1) = (2)^2 + 2(-1)^2 = 6,$$
$$f(-2, 1) = (-2)^2 + 2(1)^2 = 6,$$

$$f(-3,0) = (-3)^2 + 2(0)^2 = 9,$$
$$f(3,0) = (3)^2 + 2(0)^2 = 9,$$
$$\mathbf{f(0,-3) = (0)^2 + 2(-3)^2 = 18},$$
$$\mathbf{f(0,3) = (0)^2 + 2(3)^2 = 18}.$$

Concluímos que o valor máximo absoluto de f em $\mathcal{D}$ (não é 6 e sim) é 18 e os pontos de máximo absoluto são

$$\boxed{(0,-3) \text{ e } (0,3)}.$$

O valor mínimo absoluto de f em $\mathcal{D}$ é 0 e o ponto de mínimo absoluto é

$$\boxed{(0,0)}.$$