



Orientações gerais:

- (1) A avaliação tem duração de 2 horas e deve ser realizada sem consulta.
- (2) Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Só serão aceitas respostas justificadas.

Questão 1: (2,5 pontos)

Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2y + y^2}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que f não é contínua.

Questão 2: (2,5 pontos)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x^2y)^{1/3}$.

- (a) (0,5 ponto) Calcule $\nabla f(8, 1)$.
- (b) (1,0 ponto) Mostre que o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(8, 1, 4)$ é dado pela equação $x + 4y - 3z = 0$.
- (c) (1,0 ponto) Encontre a equação do plano que é paralelo ao plano obtido no item (b) e que passa pelo ponto $(6, -2, -1)$.

Questão 3: (2,5 pontos)

Considerando as relações entre derivada direcional e vetor gradiente, responda às seguintes questões.

- (a) (1,5 ponto) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x^2y + y^2$. A partir da definição de derivada parcial, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$. Em seguida, encontre a direção, no plano xy , de maior inclinação da superfície $z = f(x, y)$ a partir do ponto $(1, 2, 8)$.
- (b) (1,0 ponto) Na cartografia, a curva descrita por um rio em um mapa intersecta, ao menos de modo aproximado, perpendicularmente as curvas de nível do relevo. Explique esse fato.

Questão 4: (2,5 pontos)

Seja $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 7/2 \}$. Seja a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2y^2 + x^3 - 2x + y^2 .$$

- (a) (0,5 ponto) Represente o conjunto D no plano xy .
- (b) (1,0 ponto) Encontre os máximos e mínimos locais de f no interior de D , se existirem.
- (c) (1,0 ponto) Encontre o máximo global e o mínimo global de f .

No verso desta folha, estão representados dois gráficos que podem ser úteis na resolução desta questão. Note que os eixos dos gráficos estão em escalas diferentes, para melhor visualização.

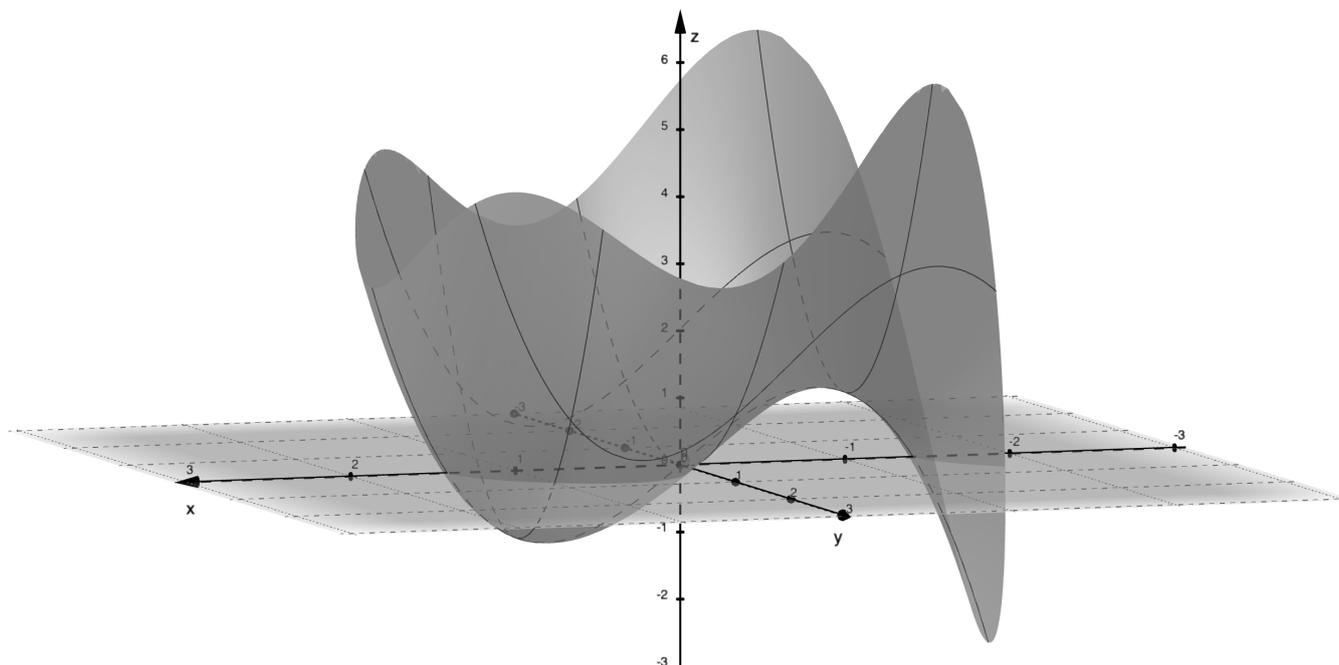


Figura 1: Superfície $z = x^2y^2 + x^3 - 2x + y^2$ com $x^2 + y^2 \leq \frac{7}{2}$.

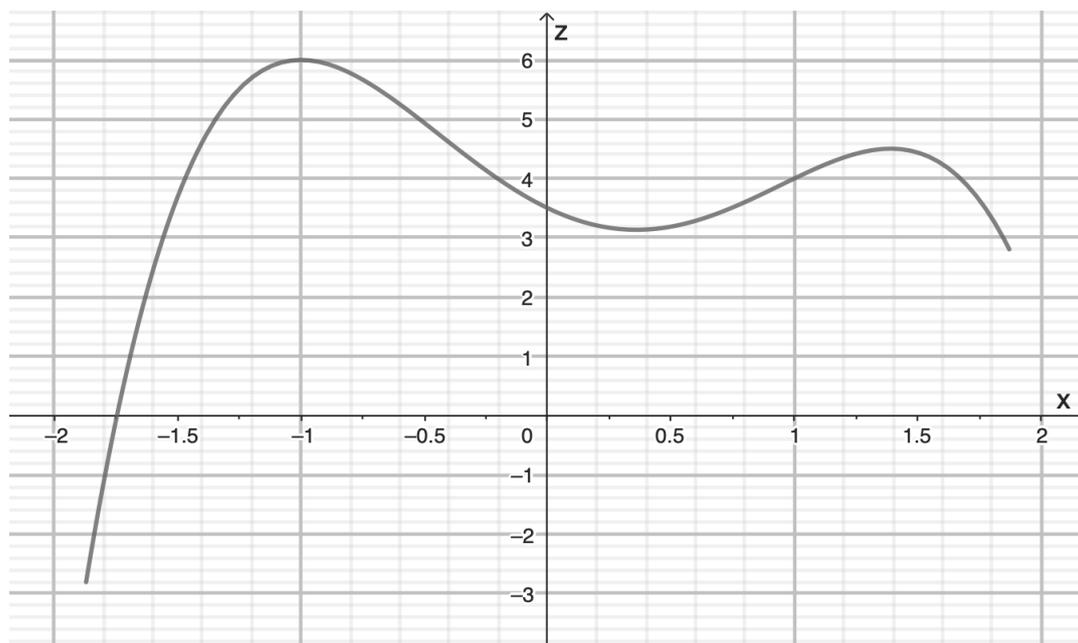


Figura 2: Curva $z = -x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2}$
com $-\sqrt{\frac{7}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{7}{2}}$